51(07)
С24

И.А.БАРАНОВ
Г.И.БОГАТЫРЕВ
О.А.БОКОВНЕВ

МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ ТЕХНИКУМОВ

НА БАЗЕ 8 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для средних специальных учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.10
Б 24
УДК 51

Инв. № 507396
Библиотека УНИ

Иван Алексеевич Баранов,
Геннадий Иванович Богатырев,
Олег Александрович Боковнев

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ ТЕХНИКУМОВ

на базе 8 классов средней школы

Редактор *Т. А. Панькова*
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*
Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11193

Сдано в набор 16.04.82. Подписано к печати 23.08.82.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Условн. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 22,58.
Тираж 300000 экз. Заказ № 247. Цена 80 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28.

Б $\frac{1702000000—128}{053(02)-82}$ 21-82

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы,
1982

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 8

ЧАСТЬ 1. **АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА** 9

Глава I. **Множество** 9

Глава II. **Целые числа и дроби** 12

§ 1. Арифметические действия над целыми числами 12
§ 2. Простые и составные натуральные числа 14
§ 3. Общие делители и кратные. Наименьшее общее кратное . . . 14
§ 4. Дроби обыкновенные и десятичные, арифметические действия над ними 17
§ 5. Рациональные числа. Периодические дроби 22
§ 6. Числовая прямая. Модуль числа 24
§ 7. Решение примеров 27

Упражнения 29

Глава III. **Приближенные вычисления** 32

§ 1. Точные и приближенные значения величин. Метод границ . . 32
§ 2. Абсолютная и относительная погрешности 33
§ 3. Запись приближенных значений чисел. Стандартный вид числа 36
§ 4. Сложение и вычитание приближенных значений чисел 38
§ 5. Умножение и деление приближенных значений чисел 39

Упражнения 41

Глава IV. **Степени и корни. Действительные числа** 43

§ 1. Возведение рациональных чисел в степень с натуральным показателем. Извлечение корня 43
§ 2. Понятие иррационального числа 46
§ 3. Действительные числа. Арифметические корни. Прямоугольная система координат на плоскости 48
§ 4. Степень с натуральным показателем 51

§ 5. Арифметический квадратный корень 54
§ 6. Степень с целым показателем 58
§ 7. Арифметический корень n-й степени 59
§ 8. Степень с рациональным показателем 62
§ 9. Понятие о степени с иррациональным показателем. Свойства степени с действительным показателем 64
§ 10. Решение задач 65
Упражнения 68

Глава V. **Выражения** 71

§ 1. Числовые и алгебраические выражения 71
§ 2. Отношения чисел и однородных величин. Проценты 74
§ 3. Пропорции 77
§ 4. Одночлены и многочлены. Стандартный вид одночленов и многочленов 80
§ 5. Формулы сокращенного умножения 82
§ 6. Многочлены с одной переменной 83
§ 7. Тождественные преобразования многочленов 85
§ 8. Алгебраические дроби. Иррациональные выражения 87
§ 9. Тождественные преобразования алгебраических выражений (решение задач) 94
Упражнения 98

Глава VI. **Уравнения и неравенства** 103

§ 1. Уравнения с одним неизвестным. Корень уравнения 103
§ 2. Линейные уравнения 105
§ 3. Квадратные уравнения. Теорема Виета 106
§ 4. Разложение квадратного трехчлена на множители 112
§ 5. Уравнения, приводимые к линейным и квадратным 113
§ 6. Уравнения с несколькими неизвестными. Системы уравнений 117
§ 7. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 118
§ 8. Уравнения и системы уравнений (решение задач) 120
§ 9. Задачи на составление уравнений 124
§ 10. Неравенства и их свойства 127
§ 11. Доказательство неравенств 130
§ 12. Решение линейных и квадратных неравенств с одним неизвестным 133
§ 13. Системы неравенств с одним неизвестным. Неравенства, содержащие модуль 138
§ 14. Задачи на уравнения и неравенства. Метод интервалов . . . 143
Упражнения 148

Глава VII. **Функции и графики** 152

§ 1. Понятие функции. Способы задания функции 152
§ 2. Свойства функций 154
§ 3. Обратная функция и ее график 156

§ 4. Свойства и графики некоторых простейших функций 158
§ 5. Графический способ решения уравнений и систем уравнений. Уравнение окружности 174
§ 6. Построение графиков (решение задач) 177
§ 7. Применение графиков к решению неравенств 182

Упражнения 184

Глава VIII. **Арифметическая и геометрическая прогрессии. Логарифмы** 185

§ 1. Числовые последовательности 185
§ 2. Арифметическая прогрессия 187
§ 3. Геометрическая прогрессия 189
§ 4. Задачи на прогрессии 192
§ 5. Логарифмирование и потенцирование 193
§ 6. Десятичные логарифмы. Характеристика и мантисса 197
§ 7. Решение уравнений и неравенств, содержащих показательную и логарифмическую функции 198

Упражнения 200

ЧАСТЬ 2. **ГЕОМЕТРИЯ**

Глава IX. **Основные понятия геометрии и геометрические фигуры** 203

§ 1. Основные понятия геометрии 203
§ 2. Геометрические фигуры 205

Упражнения 210

Глава X. **Прямая** 211

§ 1. Треугольники 211
§ 2. Основные геометрические построения 220
§ 3. Параллельные прямые 222
§ 4. Четырехугольники 228

Упражнения 233

Глава XI. **Окружность** 235

§ 1. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности 235
§ 2. Углы в окружности 239
§ 3. Свойства хорд и диаметров окружности 242
§ 4. Вписанные и описанные многоугольники 243
§ 5. Четыре замечательные точки в треугольнике 247

Упражнения 249

Глава XII. **Подобие многоугольников** 250

§ 1. Пропорциональные отрезки 250
§ 2. Подобные треугольники 252
§ 3. Теорема Пифагора 256
§ 4. Свойство биссектрисы треугольника. Пропорциональность отрезков хорд и секущих 258
§ 5. Подобные многоугольники 260

Упражнения 263

Глава XIII. **Преобразование фигур** 264

§ 1. Примеры преобразований фигур 264
§ 2. Движение. Равенство фигур 266
§ 3. Преобразование подобия 270

Упражнения 271

Глава XIV. **Векторы на плоскости и тригонометрические функции угла** 272

§ 1. Сложение и вычитание векторов 272
§ 2. Умножение вектора на число 275
§ 3. Координаты вектора на плоскости 276
§ 4. Повороты на углы любой величины 278
§ 5. Тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс угла) 279
§ 6. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике 284
§ 7. Метрические соотношения в произвольном треугольнике; теорема синусов и теорема косинусов 287

Упражнения 291

Глава XV. **Площади многоугольников** 292

§ 1. Понятие площади многоугольника 293
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции 294
§ 3. Площадь многоугольника. Отношение площадей подобных многоугольников 300

Упражнения 301

Глава XVI. **Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга** 303

§ 1. Правильные многоугольники 303
§ 2. Длина окружности 305
§ 3. Площадь круга 308

Упражнения 309

Глава XVII. **Задачи** 309

Упражнения 316

Глава XVIII. **Начальные сведения из стереометрии** 317

§ 1. Аксиомы стереометрии 317
§ 2. Прямые и плоскости в пространстве 318
§ 3. Многогранники (прямая призма, прямоугольный параллелепипед, пирамида, правильная пирамида) 320
§ 4. Фигуры вращения (цилиндр, конус, шар) 324

Упражнения 329

Ответы к упражнениям 330

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие предназначено для окончивших восьмилетнюю школу и поступающих в средние специальные учебные заведения.

Материалы, изложенные в пособии, соответствуют программе по математике для 5—8 классов средней школы. Кроме того, в пособие включен дополнительный материал с целью углубленного повторения.

Пособие состоит из двух частей: первая посвящена алгебре, а вторая — геометрии на плоскости и элементам стереометрии.

Наряду с изложением теоретического материала авторы уделяют большое внимание решению типовых задач, а также задач повышенной трудности. Приведено большое количество подробно решенных примеров, иллюстрирующих теорию. В конце каждой главы приводятся упражнения. Они состоят из двух разделов: первый предназначен для занятий с преподавателями, а второй — для самостоятельных занятий. Задачи для самостоятельного решения помогут поступающим проверить, насколько хорошо они разобрались в изучаемом курсе. Эти задачи снабжены ответами, а в некоторых случаях — указаниями.

Авторы считают необходимым отметить принципиально важное значение пробных учебников по алгебре (Ш. А. Алимов, В. А. Ильин, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин), по геометрии (Л. С. Атанасян, Э. Г. Позняк) и учебного пособия по геометрии А. В. Погорелова.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам — профессору М. И. Шабунину и доценту Б. Г. Агафонову за ценные советы и замечания.

ЧАСТЬ 1. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

Глава I. МНОЖЕСТВО

Понятие *множества* относится к числу первоначальных понятий математики. Примеры множеств: множество столов в классной комнате, множество жилых домов в данном городе, множество целых чисел, множество всех треугольников, которые можно вписать в данную окружность, и т. д.

Предметы, объекты, из которых состоит множество, называются *элементами* множества. Например, множество натуральных чисел, меньших 5, состоит из следующих элементов: 1, 2, 3, 4.

Различают конечные и бесконечные множества. Множество столов и множество жилых домов в городе конечные: столы и дома можно пересчитать; их определенное число. Множество целых чисел и множество всех треугольников, вписанных в данную окружность, бесконечные.

Множества будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита, а их элементы — малыми буквами. Например, запись $A = \{a, b, c, d\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c, d.

Если элемент x является элементом множества E, то употребляется запись $x \in E$ (читается так: x принадлежит множеству E). Если же x не является элементом множества E, то пишут $x \notin E$ (читается так: x не принадлежит множеству E).

Например, если N — множество натуральных чисел, то $1 \in N$, $2 \in N$, $\frac{1}{3} \notin N$, $-2 \notin N$, $\pi \notin N$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$. Примеры пустых множеств: множество натуральных корней уравнения $x + 1 = -2$, множество действительных решений неравенства $x^2 + 1 < 0$, множество общих точек двух различных параллельных прямых и т. п.

Иногда приходится рассматривать не все множество, а только его часть. Например, рассматривается не все множество натуральных чисел, а только множество простых чисел. Вместо слов «часть множества» часто говорят «подмножество».

Множество B называется *подмножеством* множества A, если каждый элемент множества B является и элементом множества A. В этом случае пишут $B \subset A$.

Из определения вытекает, что любое множество является подмножеством самого себя: $A \subset A$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing \subset A$.

Если для двух множеств A и B одновременно справедливы утверждения $A \subset B$ и $B \subset A$, то это значит, что они состоят из одних и тех же элементов. Такие множества называют *равными* и пишут $A = B$.

Например, $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\}$ и т. п. Найдем все подмножества множества $M = \{a, b, c\}$. Получаем: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$.

Над множествами можно выполнять различные операции. Простейшие из них — пересечение и объединение.

Пересечением двух множеств называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам.

Если C — пересечение множеств A и B, то пишут $C = A \cap B$ ($\cap$ — знак пересечения).

Например, пересечением множества натуральных четных чисел и множества простых чисел является множество, состоящее из одного элемента — числа 2.

Если множество B является подмножеством множества A, то пересечением множеств A и B является само множество B, т. е. если $B \subset A$, то $A \cap B = B$.

Например, если $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{a, b, d\}$, то $B \subset A$, и поэтому $A \cap B = B$.

Объединением двух множеств называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

Если C — объединение множеств A и B, то пишут $C = A \cup B$ ($\cup$ — знак объединения).

Например, объединением множества натуральных четных чисел и множества натуральных нечетных чисел является множество натуральных чисел.

Если множество B является подмножеством множества A, то объединение множеств A и B есть множество A, т. е. если $B \subset A$, то $A \cup B = A$.

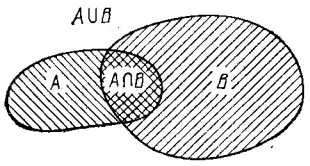


Рис. 1.

Например, если $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{a, b, c, d\}$, то $B \subset A$, и поэтому $A \cup B = A$.

Для наглядности будем рассматривать множество в виде некоторого множества точек плоскости. На рис. 1 изображены пересечение и объединение двух множеств.

В арифметике и алгебре используются *числовые множества* — множества, элементами которых являются числа.

Сначала рассматривают натуральные числа: 1, 2, 3, 4, ... При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако при вычитании двух натуральных чисел не всегда получается натуральное число. Поэтому были введены отрицательные целые числа и число нуль. Множество натуральных чисел расширилось до множества целых чисел: 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ...

При сложении, умножении, вычитании целых чисел всегда получаются натуральные числа. Однако при делении двух целых чисел не всегда получается целое число. Поэтому были введены дроби. Появляется понятие рационального числа, т. е. числа вида $\frac{a}{b}$, где a и b—целые, причем $b \neq 0$. Множество целых чисел расширилось до множества рациональных чисел. Множество рациональных чисел есть объединение целых чисел и дробей.

При выполнении четырех арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Однако при извлечении квадратного корня из рационального числа не всегда получается рациональное число. Поэтому к рациональным числам добавляются новые числа, которые называются иррациональными (см. § 2 гл. IV).

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел.

Модулем (или абсолютной величиной) действительного числа a называется: само число a, если a—положительное число; нуль, если $a=0$; число $(-a)$, если a—отрицательное число. Модуль действительного числа a обозначается $|a|$. Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $|4|=4$, $|0|=0$, $|-6|=-(-6)=6$.

Основные свойства модулей действительных чисел будут приведены в § 3 гл. IV.

Для наглядности действительные числа принято изображать точками *числовой оси* (или *числовой прямой*) —прямой, на которой выбрано положительное направление, масштаб и начало отсчета O (рис. 2).

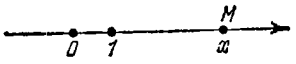


Рис. 2.

Из геометрии известно, что всякий отрезок OM имеет длину, выраженную рациональным или иррациональным числом (доказательство этого утверждения опускаем). Поэтому каждой точке M на числовой оси соответствует вполне определенное действительное число x, положительное, если M лежит справа от O, и отрицательное, если M лежит слева от O. Модуль числа x равен длине отрезка OM.

Наоборот, всякому действительному числу x соответствует на числовой оси определенная точка M, которая удалена от точки

O на расстояние, равное $|x|$, и лежит справа от O, если $x > 0$, и слева — если $x < 0$. При $x = 0$ точка M совпадает с точкой O. Таким образом, между действительными числами и точками числовой оси установлено взаимно однозначное соответствие.

Рассмотрим следующие числовые множества. Если $a < b$, то множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *числовым отрезком* (или просто *отрезком*) и обозначается $[a; b]$.

Если $a < b$, то множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается $(a; b)$.

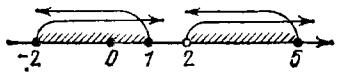


Рис. 3.

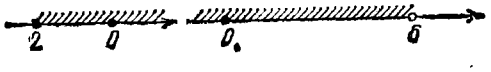


Рис. 4.

Множества действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, называются *полуинтервалами* и обозначаются соответственно $[a; b)$ и $(a; b]$.

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называют *числовыми промежутками*. На числовой оси промежутку соответствует некоторый геометрический отрезок с включением в него концевых точек или без включения их в зависимости от типа промежутка.

Например, отрезок $[-2; 1]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-2 \leqslant x \leqslant 1$; полуинтервал $(2; 5]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $2 < x \leqslant 5$ (рис. 3).

Рассматриваются также бесконечные промежутки. Например, $[a; +\infty)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$; $(a; +\infty)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$, и т. п.; $(-\infty; +\infty)$ — множество всех действительных чисел. На числовой оси бесконечные промежутки изображаются лучами. Например, $[-2; +\infty)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих условию $x \geqslant -2$; $(-\infty; 5)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих условию $x < 5$ (рис. 4).

Глава II. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА И ДРОБИ

§ 1. Арифметические действия над целыми числами

Числа, появившиеся в результате счета, называются натуральными числами. Натуральные числа обозначают с помощью десяти знаков цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Множество натуральных чисел бесконечно. Оно имеет наименьшее число — единицу, но не имеет наибольшего числа.

Все натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют ряд натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, ... Сово-

купность чисел 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ... образует множество целых чисел.

Над целыми числами устанавливаются действия сложения и умножения, которые обладают следующими основными свойствами:

1) *переместительное свойство сложения*: $a+b=b+a$ *);
2) *сочетательное свойство сложения*: $(a+b)+c=a+(b+c)$;
3) *переместительное свойство умножения*: $a \cdot b=b \cdot a$;
4) *сочетательное свойство умножения*: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$;
5) *распределительное свойство умножения относительно сложения*: $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$.

Основные свойства (законы арифметики) остаются справедливыми для любого конечного числа слагаемых и сомножителей.

Используются также следующие свойства:

6) *свойство нуля при сложении*: $a+0=a$;
7) *свойство нуля при умножении*: $a \cdot 0=0$;
8) *свойство единицы при умножении*: $a \cdot 1=a$.

Вычитание и деление определяются как действия, обратные сложению и умножению.

Вычесть из числа a число b — значит найти такое число c, которое в сумме с числом b даст число a:

$$c=a-b, \text{ если } b+c=a.$$

Число c называется *разностью* чисел a и b. Для целых чисел вычитание всегда выполнимо и единственно, т. е. для любых a и b существует и притом единственная разность c.

Разделить число a на число b — значит найти такое число q, при умножении на которое число b даст число a:

$$q=a:b \quad \text{или} \quad q=\frac{a}{b}, \text{ если } b \cdot q=a.$$

Деление не всегда выполнимо на множестве целых чисел. Невозможно деление на нуль. Если $a \neq 0$, а $b=0$, то нет такого числа q, для которого $b \cdot q=a$. Если $a=b=0$, то q — любое.

Если для чисел a и b существует *частное* q, т. е. $bq=a$, то говорят, что a *делится на* b (или b делит a). При этом a называется *кратным* числа b (или *делимым*), а b — *делителем* числа a. Число называется *четным*, если оно делится на 2, и *нечетным*, если оно не делится на 2. Нуль — четное число.

Для любых чисел a и b $(b>0)$ справедливо следующее утверждение: *число a всегда можно представить и притом единственным образом в виде*

$$a=bq+r, \text{ где } 0 \leqslant r<b. \qquad (1)$$

Определение. *Разделить число a на число b $(b>0)$ с остатком* — значит найти такие числа q и r, что $a=bq+r$, причем r удовлетворяет условию $0 \leqslant r<b$.

*) Буквы a, b, c, ... обозначают здесь целые числа.

Число q называется *частным*, а число r — *остатком*. Если $r=0$, то a делится на b без остатка или нацело.

Например, при делении 37 на 5 получается в частном 7 и в остатке 2, а при делении (—8) на 3 — в частном (—3) и в остатке 1: $37=5\cdot 7+2$, $-8=3\cdot(-3)+1$.

§ 2. Простые и составные натуральные числа

Делителем числа a называется натуральное число, на которое число a делится нацело. Например, число 20 имеет шесть делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Определение. Натуральное число a, не равное единице, называется *простым*, если оно имеет только два делителя: единицу и само число a. Натуральное число a называется *составным*, если оно имеет более двух делителей.

Единица — единственное натуральное число, которое не является ни простым, ни составным.

Наименьшим простым числом является число 2. Это единственное четное простое число. Остальные простые числа нечетные. Вот первые двадцать простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема (основная теорема арифметики). *Всякое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде произведения простых сомножителей и притом единственным способом (произведения, отличающиеся только порядком сомножителей, различными не считаются).*

Объединяя равные сомножители, получим

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}, \tag{2}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые делители числа a, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — число их повторений в разложении числа a.

Равенство (2) называется *разложением натурального числа a на простые множители*.

Например, $72=2^3\cdot 3^2$, $13=13^1$.

§ 3. Общие делители и кратные. Наименьшее общее кратное

Будем рассматривать натуральные числа.

Определение. Если натуральные числа $a, b, \ldots, l$ делятся нацело на одно и то же натуральное число d, то число d называется их *общим делителем*. Наибольший из общих делителей называется *наибольшим общим делителем* и сокращенно обозначается НОД. Если НОД чисел $a, b, \ldots, l$ равен 1, то эти числа называются *взаимно простыми*.

Например, НОД чисел $a=48=2^4\cdot 3$ и $b=36=2^2\cdot 3^2$ равен $2^2\cdot 3=12$. Числа $28=2^2\cdot 7$ и $15=3\cdot 5$ взаимно простые, так как

их НОД равен 1. Легко проверить, что числа 6, 8, 15 также являются взаимно простыми.

Кратным натурального числа a называется натуральное число k, которое делится нацело на a.

Всякое натуральное число, которое делится нацело на каждое из натуральных чисел a, b, ..., l, называется их *общим кратным*. Наименьшее из общих кратных называется *наименьшим общим кратным* и сокращенно обозначается НОК.

Например, НОК чисел $48=2^4\cdot 3$ и $36=2^2\cdot 3^2$ есть число $2^4\cdot 3^2=144$.

Приведем без доказательства свойства взаимно простых чисел.

1) *Если число a делится на каждое из взаимно простых чисел, то оно делится и на произведение этих чисел.*

Например, если число делится на 3 и на 5, то оно делится и на 15. Однако нельзя утверждать, что число, делящееся на 4 и на 6 (НОД $(4; 6)\neq 1$), обязательно делится и на 24. Например, это неверно для 36.

2) *Если произведение ab делится на c, где b и c — взаимно простые числа, то a делится на c.*

Пример 1. Найти НОД и НОК чисел 72 и 60.

Решение. Так как $72=2^3\cdot 3^2$, $60=2^2\cdot 3\cdot 5$, то НОД $=2^2\cdot 3=12$, НОК $=2^3\cdot 3^2\cdot 5=360$.

Практически при разложении числа на множители и нахождении НОД и НОК пользуются признаками делимости.

Пусть p — делимое. В десятичной системе счисления натуральное число p записывается в виде

$$p=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0, \qquad (3)$$

где a_0 — число единиц, a_1 — число десятков, a_2 — число сотен и т. д. Число p можно записать и в виде

$$p=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0}$$

(черта сверху ставится для того, чтобы отличать это число от произведения чисел $a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0$).

Рассмотрим признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9.

Признак делимости на 2 и на 5. На 2 (или на 5) делятся те и только те числа, цифра единиц которых выражает число, делящееся на 2 (или соответственно на 5).

В самом деле,

$$p=(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10)+a_0.$$

В скобках стоит число, кратное 10, и оно делится на 2 и на 5. Если число a_0 делится на 2 (или на 5), то и p будет делиться на 2 (или на 5), как сумма чисел, каждое слагаемое которой делится на одно и то же число.

Докажем обратное утверждение. Если p делится на 2 (или соответственно на 5), то число

$$a_0=p-(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10)$$

будет делиться на 2 (или на 5). Признак доказан.

Признак делимости на 4. На 4 делятся те и только те числа, у которых две последние цифры выражают число, делящееся на 4.

Предлагаем доказать этот признак самостоятельно, записав делимое p в виде

$$p=(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2)+(a_1\cdot 10+a_0).$$

Признак делимости на 3 и на 9. На 3 (или на 9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (или соответственно на 9).

Для доказательства запишем делимое в виде

$$p=[a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1)]+$$
$$+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0).$$

Очевидно, что число

$$10^k-1=\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{k\text{ цифр}}$$

делится на 3 и на 9. Если число, стоящее в круглых скобках и равное сумме цифр числа p, делится на 3 (или на 9), то и p делится на 3 (или на 9). Наоборот, из делимости числа p на 3 (или на 9) вытекает, что и число

$$a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0=$$
$$=p-[a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1)],$$

равное сумме цифр числа p, будет делиться на 3 (или соответственно на 9). Признак доказан.

Признак делимости на 6. На 6 делятся те и только те числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3.

Это следует из свойства делимости числа на произведение взаимно простых чисел.

Свойство последовательных целых чисел. Из n последовательных целых чисел

$$a,\ a+1,\ \ldots,\ a+n-1 \qquad (4)$$

одно и только одно делится на n.

Действительно, если $a=nq$, то утверждение справедливо.

Пусть $a=nq+k$, где k—одно из чисел 1, 2, ..., $n-1$. Тогда число $a+(n-k)=nq+k+(n-k)=n(q+1)$ находится среди чисел (4) и делится на n.

Среди чисел (4) нет других чисел, делящихся на n, так как иначе разность таких чисел, меньшая n, делилась бы на n, что невозможно.

Например, число $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ делится на 2, на 3 и, следовательно, на 6.

Пример 2. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 126, 540, 630.

Решение. Применяя признаки делимости, разложим данные числа на простые множители. Имеем

126	2	540	2	630	2
63	3	270	2	315	3
21	3	135	3	105	3
7	7	45	3	35	5
		15	3	7	7
		5	5		

Следовательно, $126=2\cdot3^2\cdot7$, $540=2^2\cdot3^3\cdot5$, $630=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$. Отсюда НОД $(126; 540; 630)=2\cdot3^2=18$, НОК $(126; 540; 630)=2^2\cdot3^3\times\times5\cdot7=3780$.

§ 4. Дроби обыкновенные и десятичные, арифметические действия над ними

Результат деления двух целых чисел a и b $(b\neq0)$ можно записать в виде $\frac{a}{b}$. Число вида

$$\frac{a}{b}, \tag{5}$$

где a и b—целые и $b\neq0$, называется *дробью*. При этом a называется *числителем* дроби, а число b—ее *знаменателем*.

Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$, если $ad=bc$.

По определению

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}, \text{ если } (ad-bc)bd>0,$$

и

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}, \text{ если } (ad-bc)bd<0.$$

В частном случае для дробей с положительными знаменателями b и d получаем:

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}, \text{ если } ad>bc, \text{ и } \frac{a}{b}<\frac{c}{d}, \text{ если } ad<bc.$$

Например, $\frac{(-3)}{4}>\frac{(-6)}{7}$, так как $(-3)\cdot7=-21$, $4\cdot(-6)=-24$ и $(-21)>(-24)$; $\frac{4}{7}<\frac{5}{8}$, так как $4\cdot8<7\cdot5$.

Из определения равенства дробей следует, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{ak}{bk}$ равны. Действительно, справедливо равенство $a\cdot bk=b\cdot ak=abk$. Отсюда вытекает основное свойство дроби: *если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится дробь, равная данной:*

$$\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}=\frac{a:n}{b:n}.$$

507396

На этом свойстве основано сокращение дробей, т. е. деление числителя и знаменателя на их общий делитель. Например, $\frac{24}{42}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$. Обычно сокращение проводят до тех пор, пока числитель и знаменатель не будут взаимно простыми числами.

Основное свойство дроби используют и для приведения дроби к другому знаменателю. Например, дробь $\frac{5}{12}$ можно привести к знаменателю 24. Для этого надо умножить числитель и знаменатель дроби на число 2. Получим $\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{10}{24}$. В этом случае число 2 называют *дополнительным множителем*. Дробь $\frac{5}{12}$ можно привести и к другому знаменателю, например к знаменателю 36. В самом деле, $\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{15}{36}$. Здесь дополнительным множителем служит число 3.

Часто приходится приводить две или несколько дробей к общему знаменателю. Для этого находят наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей и каждую дробь приводят к этому знаменателю. Например, приведем дроби $\frac{7}{12}$ и $\frac{5}{18}$ к общему знаменателю. Для этого найдем наименьшее общее кратное чисел 12 и 18. Таким числом будет 36. Теперь найдем дополнительный множитель для первой дроби: разделим наименьшее общее кратное 36 на знаменатель дроби 12 и получим $36:12=3$. Затем найдем дополнительный множитель для второй дроби и получим $36:18=2$. Умножив числители и знаменатели данных дробей на их дополнительные множители, получим $\frac{7}{12}=\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{21}{36}$ и $\frac{5}{18}=\frac{5\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{10}{36}$.

Сложение и умножение дробей определяются по правилам:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Вычитание и деление дробей определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению. Из этого определения легко выводятся правила этих действий:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd};\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Для дробей сохраняются основные свойства арифметических действий над целыми числами, приведенные в § 1 гл. II.

Дробь вида

$$\frac{p}{10^n}, \tag{6}$$

где p—целое, n—натуральное число, называется *десятичной дробью*. Ее знаменатель—степень числа 10.

В отличие от дроби десятичной дробь (5) с каким угодно знаменателем называется *обыкновенной* или *простой*.

Обыкновенные дроби с натуральными числителем и знаменателем разделяются на правильные и неправильные дроби. *Правильной* называется дробь, у которой числитель меньше знаменателя. *Неправильной* называется дробь, у которой числитель больше или равен знаменателю. Любая правильная дробь меньше 1, а любая неправильная дробь больше или равна 1. Например, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{9}$ — правильные дроби, а $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{121}{10}$ — неправильные дроби.

Из любой неправильной дроби можно выделить целую часть. Для этого надо произвести деление с остатком числителя на знаменатель. Например, выделим целую часть дроби $\frac{45}{7}$. Разделив 45 на 7, получим в частном 6, а в остатке 3. Значит, $\frac{45}{7}=6\frac{3}{7}$.

Число, которое состоит из натурального числа и правильной дроби, называется *смешанным числом*. У смешанного числа $6\frac{3}{7}$ число 6 является целой частью, а дробь $\frac{3}{7}$ — дробной частью числа.

Чтобы смешанное число записать в виде неправильной дроби, нужно умножить его целую часть на знаменатель дробной части и к произведению прибавить числитель дробной части. Полученная сумма будет числителем неправильной дроби, а ее знаменателем будет знаменатель дробной части. Например, представим смешанное число $3\frac{5}{8}$ в виде неправильной дроби. Для этого умножим 3 на 8 и к произведению прибавим 5. Получим $3\cdot 8+5=29$. Итак, $3\frac{5}{8}=\frac{29}{8}$.

Рассмотрим правила действий над десятичными дробями.

Любая положительная десятичная дробь (6) (при $p>0$) представима в виде суммы

$$a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0+\frac{b_1}{10}+\ldots+\frac{b_n}{10^n}, \quad (7)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ — цифры.

Если $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, то (7) есть целое число. При $a_m=a_{m-1}=\ldots=a_0=0$ дробь (7) называется *правильной десятичной дробью*. В общем случае, когда не все $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и не все $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны нулю, дробь (7) называется *смешанной*.

Условились десятичную дробь (7) записывать также в виде

$$a_ma_{m-1}\ldots a_0,b_1b_2\ldots b_n \quad \text{или} \quad c,b_1b_2\ldots b_n, \quad (8)$$

где $c=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\ldots+a_0=\overline{a_ma_{m-1}\ldots a_0}$ — целое число (целая часть дроби), а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — десятичные знаки (они образуют дробную часть).

Так как (8)—иная запись суммы (7), то после b_n можно приписать любое число нулей, и величина дроби от этого не изменится.

Запись десятичных дробей в виде (8) удобна для сравнения дробей и для выполнения действий над ними.

Рассмотрим две десятичные дроби

$$p = c,b_1b_2\ldots b_n \quad \text{и} \quad p' = c',b_1'b_2'\ldots b_n'.$$

Они равны: $p = p'$, если $c = c'$, $b_1 = b_1'$, $b_2 = b_2'$, $\ldots$, $b_n = b_n'$.

Из двух положительных дробей ($p \geqslant 0$, $p' \geqslant 0$) p больше p': $p > p'$, если $c > c'$, либо если $c = c'$, но $b_1 > b_1'$, либо если $c = c'$, $b_1 = b_1'$, $\ldots$, $b_k = b_k'$ (для некоторого натурального числа k), но $b_{k+1} > b_{k+1}'$.

Например, сравнивая целые части дробей 17,839 и 18,153, получаем, что $17{,}839 < 18{,}153$. Сравним 13,2 и 13,187; их целые части равны. Рассматривая дробные части, получим, что $13{,}2 > 13{,}187$.

Каждой положительной десятичной дроби $p = c,b_1b_2\ldots b_n$ сопоставляется противоположная ей отрицательная дробь $-p = -c,b_1b_2\ldots b_n$. Если $p > p' > 0$, то считают, что $-p < -p'$, и наоборот. Положительная дробь больше нуля и любой отрицательной дроби. Нуль больше любой отрицательной дроби.

Например, сравнивая $(-13{,}27)$ и $(-12{,}1)$, получим, что $-13{,}27 < -12{,}1$, так как $13{,}27 > 12{,}1$.

Чтобы сложить две положительные десятичные дроби, надо: 1) записать каждый разряд одной дроби под соответствующим разрядом другой дроби, 2) сложить получившиеся числа как натуральные числа, 3) поставить в сумме запятую под запятыми в слагаемых. Аналогичным образом производят вычитание дробей. Например,

$$\begin{array}{r} 83{,}759 \\ +\ 4{,}280 \\ \hline 88{,}039 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 83{,}759 \\ +\ 4{,}28 \\ \hline 88{,}039 \end{array}; \qquad \begin{array}{r} 5{,}370 \\ -\ 2{,}093 \\ \hline 3{,}277 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 5{,}37 \\ -\ 2{,}093 \\ \hline 3{,}277 \end{array}.$$

Чтобы умножить одну положительную десятичную дробь на другую, надо выполнить их умножение как натуральных чисел, не обращая внимания на запятые, а затем в произведении отделить справа число знаков, равное сумме числа знаков после запятой у сомножителей вместе. Например,

$$\begin{array}{r} 0{,}38 \\ \times\ 39 \\ \hline 342 \\ 114 \\ \hline 14{,}82 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}52 \\ \times\ 2{,}3 \\ \hline 456 \\ 304 \\ \hline 3{,}496 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}37 \\ \times\ 0{,}04 \\ \hline 0{,}0548 \end{array}$$

Из правила умножения десятичных дробей вытекает, что умножение числа p на 10, 100, 1000 и т. д. сводится к переносу запятой в числе p соответственно на один, два, три и т. д. знака

вправо. Например, $3{,}57 \cdot 10 = 35{,}7$; $3{,}57 \cdot 100 = 357$; $3{,}57 \cdot 1000 = 3570$.

Аналогично, умножение числа p на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. сводится к переносу запятой в числе p на один, два, три и т. д. знака влево. Например, $13{,}2 \cdot 0{,}1 = 1{,}32$; $13{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}132$; $13{,}2 \cdot 0{,}001 = 0{,}0132$. Чтобы разделить десятичную дробь на натуральное число, надо: 1) сначала выполнить деление целой части дроби на это число, 2) поставить в полученном частном запятую, 3) выполнить затем деление числа, полученного присоединением к остатку первого знака дроби, и т. д. Например,

16,45 | 7	7,41 | 13	2,835 | 45
−14 | 2,35	−65 | 0,57	−270 | 0,063
24	91	135
−21	−91	−135
35	0	0
−35		
0		

(«деление углом»)

Деление десятичной дроби на десятичную дробь сводится к делению дроби на натуральное число. Надо только в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько знаков, сколько их было в делителе после запятой. Напомним, что перенос в числе запятой вправо на один, два, три и т. д. знака означает умножение этого числа на 10, 100, 1000 и т. д. При этом частное не изменится, так как делимое и делитель умножаются на одно и то же число. Например,

$$4{,}551 : 1{,}23 = 455{,}1 : 123 = 3{,}7;$$
$$743{,}6 : 1{,}43 = 74360 : 143 = 520,$$

так как

455,1 | 123	74360 | 143
−369 | 3,7	−715 | 520
861	286
−861	−286
0	0

Деление числа p на 10, 100, 1000 и т. д. сводится к умножению этого числа на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д., т. е. к переносу запятой в числе p на один, два, три и т. д. знака влево. Например, $385{,}3 : 100 = 3{,}853$; $2{,}77 : 10 = 0{,}277$; $0{,}5 : 1000 = 0{,}0005$. Деление числа p на 0,1; 0,01; 0,001 сводится к переносу запятой в числе p один, два, три знака вправо. Например,

$$5{,}323 : 0{,}01 = 5{,}323 \cdot 100 = 532{,}3;$$
$$0{,}027 : 0{,}001 = 27; \quad 0{,}5 : 0{,}001 = 500.$$

§ 5. Рациональные числа. Периодические дроби

Рациональным числом называется число вида $\frac{a}{b}$, где a и b — целые, причем $b \neq 0$.

В частном случае, когда $b=1$, полагают $\frac{a}{1}=a$.

Таким образом, множество рациональных чисел содержит в себе как часть множество целых чисел. Оно состоит из всех целых чисел и дробей.

Над рациональными числами можно производить действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль). Правила этих действий приведены в § 4 гл. II.

Замечание. Так как целое число есть частный вид рационального числа, то возникает вопрос: не противоречат ли введенные теперь действия ранее установленным арифметическим действиям над целыми числами?

Если a и b — целые, то

$$a+b=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a+b}{1}; \quad a\cdot b=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1},$$

т. е. противоречия нет. Проверка для вычитания и деления не нужна, так как эти действия определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению.

Кроме десятичных дробей, которые в дальнейшем будем называть также конечными десятичными дробями, рассматриваются и бесконечные десятичные дроби.

Бесконечной десятичной дробью

$$c,b_1b_2\ldots b_n\ldots \tag{9}$$

называется десятичная дробь, у которой после запятой стоит бесконечно много знаков (цифр). Дробь (9) составлена из целого числа c и бесконечной последовательности цифр $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ (понятие последовательности см. в гл. VIII).

Частным случаем бесконечных десятичных дробей являются периодические дроби.

Бесконечные десятичные дроби вида

$$c,\underbrace{b_1b_2\ldots b_n}\underbrace{b_1b_2\ldots b_n}\ldots \tag{10}$$

или вида

$$c,b_1b_2\ldots b_k\underbrace{b_{k+1}b_{k+2}\ldots b_{k+n}}\underbrace{b_{k+1}b_{k+2}\ldots b_{k+n}}\ldots, \tag{11}$$

где одна или несколько цифр повторяются в неизменном порядке, называются *периодическими*. Совокупность повторяющихся цифр называется *периодом* такой дроби. При этом вместо записей (10) и (11) употребляют сокращенные записи $c,(b_1b_2\ldots b_n)$ и $c,b_1b_2\ldots b_k(b_{k+1}b_{k+2}\ldots b_{k+n})$. Например, $0{,}131313\ldots = 0{,}(13)$, $2{,}1444\ldots = 2{,}1(4)$. Дробь вида (10) называется *чистой*

периодической, дробь вида (11)—*смешанной периодической*. Будем рассматривать обыкновенные дроби с положительным числителем и знаменателем и положительные десятичные дроби, конечные и бесконечные.

Обрывая дробь (9) на каком-нибудь n-м десятичном знаке, получим конечную десятичную дробь $c,b_1b_2\ \ldots\ b_n$. С возрастанием n такая дробь не уменьшается, т. е. либо не изменяется, либо увеличивается.

Например, для дроби 0,15004 ... соответственно получаем

$$0{,}1 < 0{,}15 = 0{,}150 = 0{,}1500 < 0{,}15004 < \ \ldots$$

Определение. Бесконечная десятичная дробь (9) считается *равной* обыкновенной дроби

$$c,b_1b_2\ldots b_n\ \ldots = \frac{a}{n}, \tag{12}$$

если при всех n выполняется неравенство

$$0 \leqslant \frac{a}{b} - c,\ b_1b_2\ldots b_n \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

Замечание. Легко проверить, что это определение справедливо и в случае равенства $c,b_1b_2\ldots b_n = \frac{a}{b}$ для конечной десятичной дроби.

Равенство (12) означает, что конечная десятичная дробь $c,b_1b_2\ldots b_n$ дает приближение (с недостатком) к дроби $\frac{a}{b}$ с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

Отсюда следует, что все периодические дроби с периодом 9 равны соответствующим конечным десятичным дробям. Например,

$$0{,}(9) = 1; \quad 4{,}12(9) = 4{,}13.$$

Обратить обыкновенную дробь в десятичную—значит найти такую десятичную дробь, конечную или бесконечную, которая равна данной обыкновенной дроби.

Практически для обращения дроби делят числитель на знаменатель (по правилу деления конечной десятичной дроби на натуральное число). Например, обратим дробь $\frac{11}{6}$ в конечную десятичную дробь с точностью до 0,001: $\frac{11}{6} \approx 1{,}833$ (с недостатком), $\frac{11}{6} \approx 1{,}834$ (с избытком).

Если у несократимой дроби $\frac{a}{b}$ знаменатель $b = 2^k \cdot 5^l$, то процесс деления после конечного числа его повторения закончится, и в результате будет получена конечная десятичная дробь. Если $b \neq 2^k \cdot 5^l$, то процесс деления можно продолжать неограниченно, и в результате будет получена бесконечная десятичная дробь.

Вывод. Всякую обыкновенную дробь можно обратить в десятичную дробь, конечную или бесконечную.

Например,

$$\frac{1}{8}=0{,}125;\quad \frac{11}{6}=1{,}833\ldots=1{,}8(3);\quad \frac{4}{33}=0{,}1212\ldots=0{,}(12).$$

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема. *Всякое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной или периодической дроби и, обратно, всякая конечная десятичная дробь или дробь периодическая изображает рациональное число.*

Доказательство этой теоремы не входит в программу по математике для восьмилетней школы.

Правило обращения периодических дробей. Любая периодическая дробь вида $0,(b_1b_2\ldots b_n)$ равна обыкновенной дроби, составленной по следующему правилу:

1) ее числитель есть разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода;

2) ее знаменатель есть число, изображаемое цифрами 9 и нулями на конце. Цифра 9 повторяется столько раз, сколько было цифр в периоде, а нуль — столько раз, сколько цифр содержится между запятой и первым периодом.

Например, смешанная периодическая дробь $0,b_1(b_2b_3)$ равна обыкновенной дроби $\frac{\overline{b_1b_2b_3}-b_1}{990}$:

$$0,b_1(b_2b_3)=\frac{\overline{b_1b_2b_3}-b_1}{990}.$$

Применяя правило обращения периодических дробей, получаем

$$0,3(14)=\frac{314-3}{990}=\frac{311}{990},$$

$$2,(13)=2+\frac{13-0}{99}=2\frac{13}{99},$$

$$0,(7)=\frac{7-0}{9}=\frac{7}{9}.$$

§ 6. Числовая прямая. Модуль числа

Будем рассматривать рациональные числа. О понятиях числовой прямой и модуля числа уже говорилось в гл. I. Изучим их подробнее и установим основные свойства модулей.

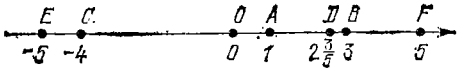


Рис. 5.

Любое рациональное число можно изобразить точкой на прямой. Для этого на горизонтальной прямой отмечают начало отсчета — точку O, выбирают единицу длины и задают направление (рис. 5). Из двух возможных

направлений на прямой одно из них — направление вправо — называется *положительным*.

Прямую, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и введен масштаб, называют *числовой прямой*.

Каждому числу соответствует только одна точка числовой прямой. Числу 0 соответствует начало отсчета O, числу 1 — точка A. Чтобы отметить точку B, соответствующую числу 3, надо в положительном направлении отложить от точки O три единичных отрезка. Чтобы найти точку C, соответствующую числу (-4), надо от точки O отложить четыре единичных отрезка, но в направлении, противоположном положительному. Чтобы найти точку D, соответствующую числу $2\frac{3}{5}$, надо от точки O отложить в положительном направлении два и еще три пятых единичного отрезка.

На числовой прямой положительные числа изображаются точками, расположенными справа от начала отсчета, а отрицательные числа — слева.

Точки O, A, B, C, D соответствуют числам 0; 1; 3; (-4); $2\frac{3}{5}$. Если точка M соответствует числу x, то говорят, что точка M имеет координату x и записывают $M(x)$. Например, на рис. 5 $O(0)$, $A(1)$, $B(3)$, $C(-4)$, $D\left(2\frac{3}{5}\right)$. Координата точки определяет ее положение на числовой прямой.

Определение. *Модулем числа* a называется неотрицательное число $|a|$, равное числу a, если $a \geqslant 0$, и числу $-a$, если $a < 0$. Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Для любого числа a выполняется неравенство $|a| \geqslant 0$, причем $|a| = 0$ только при $a = 0$.

Например, $|24| = 24$, $|-7| = -(-7) = 7$, $|-132| = -(-132) = 132$.

Если точка M имеет координату x, то модуль числа x равен длине отрезка OM.

Например, точка C имеет координату (-4), и длина отрезка OC равна 4.

Противоположные числа a и $-a$ имеют равный модуль: $|a| = |-a|$. Например, $|5| = |-5| = 5$. На числовой прямой они изображаются точками, расположенными симметрично относительно начала отсчета. На рис. 5 числа (-5) и 5 изображены точками E и F, равноудаленными от точки O.

Основные свойства модулей:

1) $|a| = |-a|$.

Это равенство непосредственно вытекает из определения модуля.

2) $|a| \geqslant a$, $|a| \geqslant -a$.

В самом деле, если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$ и подавно $|a| \geqslant -a$. Если $a < 0$, то $|a| = -a$ и подавно $|a| \geqslant a$, так как $|a| \geqslant 0$.

3) $|ab| = |a||b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

Докажем, например, что $|ab| = |a||b|$. Если хотя бы одно из чисел a или b равно нулю, то равенство очевидно. Возможны следующие случаи:

а) $a > 0$, $b > 0$; б) $a > 0$, $b < 0$;

в) $a < 0$, $b > 0$; г) $a < 0$, $b < 0$.

Рассмотрим случай г). Так как $a < 0$, $b < 0$, то $ab > 0$. В этом случае $|a| = -a$, $|b| = -b$, $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи. Свойство модуля произведения доказано.

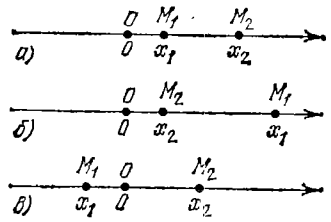


Рис. 6.

4) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,

5) $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — точки, расположенные на числовой прямой (рис. 6).

Справедлива следующая формула для расстояния между двумя точками на числовой прямой:

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|, \qquad (13)$$

где $|M_1M_2|$ — длина отрезка M_1M_2.

Для доказательства рассмотрим все возможные случаи расположения точек M_1 и M_2:

1) $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$ (рис. 6, *а*). В этом случае

$$|M_1M_2| = |OM_2| - |OM_1| = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|;$$

2) $0 \leqslant x_2 \leqslant x_1$ (рис. 6, *б*). В этом случае

$$|M_1M_2| = |OM_1| - |OM_2| = x_1 - x_2 = |x_2 - x_1|;$$

3) $x_1 < 0 < x_2$ (рис. 6, *в*). Тогда $|OM_1| = -x_1$, $|OM_2| = x_2$; в этом случае

$$|M_1M_2| = |OM_1| + |OM_2| = -x_1 + x_2 = |x_2 - x_1|.$$

Аналогично рассматриваются случаи, когда точки M_1 и M_2 лежат слева от точки O. И здесь мы получаем, что $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$

Таким образом, при любом расположении точек $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на числовой прямой расстояние между ними равно $|x_2 - x_1|$.

Из установленного на числовой прямой соответствия следует, что из двух чисел меньшим будет то, которое расположено левее, а большим — то, которое расположено правее. Отсюда:

1) всякое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа;

2) всякое отрицательное число меньше нуля;

3) из двух положительных чисел больше то, модуль которого больше;

4) из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Например,

$$-2 > -3, \text{ так как } |-2| < |-3|;$$
$$-4{,}8 < -3{,}6, \text{ так как } |-4{,}8| > |-3{,}6|.$$

§ 7. Решение примеров

Пример 1. Доказать, что:

а) сумма $\overline{ab}+\overline{ba}$ кратна 11;

б) трехзначное число, написанное одинаковыми цифрами, делится нацело на 37.

Решение. а) $\overline{ab}+\overline{ba}=(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$;

б) $\overline{aaa}=100a+10a+a=111a=37\cdot 3a$.

Пример 2. Доказать, что разность $10^{25}-7$ делится нацело на 3.

Решение. Запишем разность в виде

$$10^{25}-7=(10^{25}-1)-6.$$

Число $10^{25}-1=\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{25 \text{ цифр}}$ делится на 3 (и на 9). Так как числа $(10^{25}-1)$ и 6 делятся на 3, то и число $10^{25}-7$, как их разность, тоже делится нацело на 3.

Пример 3. Доказать, что при любом простом $p>3$ число p^2-1 делится на 24.

Решение. По свойству последовательных чисел (см. § 3 гл. II) произведение $(p-1)p(p+1)$ делится на 3.

Так как $p>3$ — простое, то на 3 делится число $(p-1)(p+1)=p^2-1$. Оно является произведением двух последовательных четных чисел (всякое простое число, не равное 2, — нечетное), т. е. $(p-1)(p+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)$, и, следовательно, оно делится на 8.

Число p^2-1 делится на взаимно простые числа 3 и 8, а значит, делится и на их произведение 24.

Отсюда вытекает, что число p^2-q^2, где p и q — простые, большие 3, также делится на 24. В самом деле, $p^2-q^2=(p^2-1)-(q^2-1)$, и каждое слагаемое делится на 24.

Пример 4. Доказать, что квадрат любого простого числа $p\geqslant 5$ при делении на 12 дает в остатке 1.

Решение. Натуральное число при делении на 6 может дать в остатке только числа 0, 1, 2, 3, 4, 5. Поэтому всякое натуральное число имеет один из следующих видов:

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5.$$

Очевидно, что числа $6k$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ составные. Поэтому простое число $p\geqslant 5$ имеет вид $6k+1$ или $6k+5$. Если

$p=6k+1$, то $p^2=(6k+1)^2=36k^2+12k+1$. Если $p=6k+5$, то $p^2=(6k+5)^2=36k^2+60k+25=12(3k^2+5k+2)+1$. Таким образом, в обоих случаях остаток при делении p^2 на 12 равен 1.

Пример 5. Доказать, что при любом натуральном $n>1$ число n^4+4 составное.

Решение. Имеем

$$n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

Если $n>1$, то

$$n^2+2n+2>5, \quad n^2-2n+2=(n-1)^2+1>2,$$

т. е. число n^4+4 разлагается на произведение двух чисел, каждое из которых не равно единице. Следовательно, n^4+4 — составное число.

Пример 6. Найти двузначное число, равное утроенной сумме его цифр.

Решение. Пусть $\overline{ab}=10a+b$ — искомое число. По условию $10a+b=3(a+b)$ или $2b=7a$. Поэтому b равно 7. Тогда $a=2$. Искомое число равно 27.

Пример 7. Найти натуральные числа n, при которых дробь $\frac{15n^2+8n+6}{n}$ является натуральным числом.

Решение. Имеем

$$\frac{15n^2+8n+6}{n}=15n+8+\frac{6}{n}.$$

Так как $15n+8$ — натуральное число, а $\frac{6}{n}$ является натуральным только при $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=6$, то при этих значениях n данная дробь есть натуральное число.

Пример 8. Сравнить дроби $\frac{161}{160}$ и $\frac{9999}{9998}$.

Решение. Имеем

$$\frac{161}{160}=1+\frac{1}{160}, \quad \frac{9999}{9998}=1+\frac{1}{9998}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{160}>\frac{1}{9998}.$$

Поэтому $\frac{161}{160}>\frac{9999}{9998}$.

Пример 9. Вычислить

$$26:\left(\frac{3:(0{,}2-0{,}1)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\frac{(34{,}6-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}\right)+\frac{2}{3}:\frac{4}{21}.$$

Решение. Напомним порядок выполнения действий:

1) если числовое выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени (возведение в степень), затем — действия второй ступени (умножение и деление) и, наконец, действия первой ступени (сложение и вычитание); при этом действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны;

2) если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключенными в скобках, а затем — все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в порядке, указанном в п. 1);

3) если вычисляется значение дробного выражения, то выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе и первый результат делится на второй.

Последовательно получаем:

1) $0{,}2-0{,}1=0{,}1$; $3:0{,}1=30$;

2) $0{,}8+1{,}2=2$; $2{,}5\cdot 2=5$;

3) $30:5=6$;

4) $34{,}06-33{,}81=0{,}25$; $0{,}25\cdot 4=1$;

5) $28{,}57-25{,}15=3{,}42$; $6{,}84:3{,}42=2$;

6) $1:2=0{,}5$;

7) $6+0{,}5=6{,}5$;

8) $26:6{,}5=26:\frac{13}{2}=4$;

9) $\frac{2}{3}:\frac{4}{21}=\frac{2\cdot 21}{4\cdot 3}=\frac{7}{2}=3{,}5$;

10) $4+3{,}5=7{,}5$.

Ответ. 7,5.

Упражнения

Раздел I

1. Какой цифрой оканчивается произведение $71\cdot 72\cdot 73\cdot\ldots\cdot 79$?

2. Из цифр 2, 3, 5 составить двузначные числа кратные: а) 2; б) 3; в) 5.

3. Доказать, что число 3^n при любом натуральном n имеет четное число десятков.

4. Доказать, что сумма пяти последовательных целых чисел всегда делится нацело на 5.

5. Доказать, что разность $\overline{ab}-\overline{ba}$ кратна 9.

6. Доказать, что сумма $10^{13}+5$ делится на 3.

7. Доказать, что квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1.

8. Разложить на простые множители числа 3084 и 1050.

9. Найти наибольший общий делитель чисел 54, 72 и 96.

10. Найти наименьшее общее кратное чисел 18, 45 и 108.

11. Доказать, что если две положительные несократимые дроби в сумме равны 1, то их знаменатели равны.

12. Что больше: $\frac{7}{19}$ или 0,36; 19^4 или $16\cdot 18\cdot 20\cdot 22$?

13. Обратить $\frac{2}{7}$ в периодическую дробь.

14. Обратить в обыкновенные дроби $2{,}(3)$ и $0{,}35(28)$.

15. Вычислить:

$$\frac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\right):4-\frac{3}{4}}:31.$$

16. Вычислить:

$$\frac{4{,}5:\left(47{,}375-\left(26\frac{1}{3}-18\cdot 0{,}75\right)\cdot 24:0{,}88\right)}{17{,}81:1{,}37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}.$$

17. Вычислить:

$$\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+1{,}361:0{,}124.$$

18. Найти число, 3,6% которого составляют

$$\frac{3+4{,}2:0{,}1}{\left(1:0{,}3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}3125}.$$

19. Найти x из пропорции

$$\frac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{x}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}.$$

20. Найти x, если

$$\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{7}}+x+8\frac{9}{11}-\frac{(1{,}6+154{,}66:70{,}3):1{,}9}{\left(2\frac{2}{5}-1{,}3\right):4{,}3}=2{,}625.$$

Раздел II

21. Найти расстояние между точками числовой прямой: а) $A(-5{,}3)$ и $B(-3{,}9)$; б) $A\left(-\frac{1}{8}\right)$ и $B\left(\frac{5}{18}\right)$; в) $A(0{,}23)$ и $B\left(\frac{1}{3}\right)$.

22. Сравнить числа: $\frac{5}{46}$ и 0,11; 11^4 и $9\cdot 10\cdot 12\cdot 13$.

23. Доказать, что сумма $108a+3b$ делится на 6 при любом натуральном a и четном b.

24. Какую цифру нужно написать вместо a, чтобы число $\overline{5431a}$ делилось на 9.

25. Не производя деления, найти остаток от деления числа 10239 на 5.

26. Назвать две последние цифры произведения $26\cdot 27\cdot 28\cdot\ldots\cdot 34\cdot 35$.

27. Доказать, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

28. Доказать, что произведение трех последовательных натуральных чисел, первое из которых — четное число, делится на 24.

29. Разложить на простые множители числа 2880; 6048.

30. Какие цифры нужно поставить вместо c в число $\overline{28c}$, чтобы получившееся число было кратно: а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6; е) 9; ж) 10?

31. Найти наибольший общий делитель чисел: а) 52, 65 и 130; б) 42, 140 и 882.

32. Найти наименьшее общее кратное чисел: а) 54, 81, 135 и 189; б) 156, 195 и 1950.

33. Как изменится частное и остаток, если к делимому прибавить удвоенный делитель?

34. Обратить $\frac{3}{11}$ в периодическую дробь.

35. Обратить в обыкновенную дробь 1,(6); 5,2(38).

36. Вычислить:

$$\frac{\left(19\frac{1}{6}+43{,}75\right):\frac{5}{6}}{\left(13{,}3-11\frac{1}{2}\right):1{,}8}-\frac{\left(26{,}8-23\frac{3}{7}\right):\frac{6}{35}}{0{,}5}.$$

37. Вычислить:

$$1{,}32:\left(1{,}17:1{,}3+8\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)\right).$$

38. Найти 72% от числа

$$\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230{,}04+46{,}75}{0{,}01}.$$

39. Найти число, если 26% его составляют

$$\frac{9\frac{1}{6}-1\frac{9}{14}-\frac{1}{30}\cdot 3\frac{1}{3}+\frac{1}{63}}{\frac{19}{96}+\left(8\frac{4}{15}-6\frac{7}{24}\right):0{,}8-1\frac{1}{2}:2{,}25}.$$

40. Вычислить:

$$\frac{\left(9-5\frac{3}{8}\right)\cdot\left(4\frac{5}{12}-4:2\frac{2}{3}+(0{,}3-0{,}5:4)\cdot\frac{4}{7}\right)}{\frac{1}{24}+0{,}25:13\frac{1}{3}}.$$

41. Вычислить:

$$3{,}25-\left(\frac{6:\frac{3}{4}-1\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{7}}{4{,}2\cdot\frac{10}{11}+5\frac{2}{11}}-\frac{\left(\frac{3}{20}+0{,}5-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{12}{49}}{3\frac{1}{3}+\frac{2}{9}}\right)\cdot 2\frac{1}{3}.$$

42. Найти x из пропорции

$$\frac{3{,}6}{14-15\frac{1}{8}:2{,}2}=\frac{x}{1{,}5+2\frac{2}{3}+3{,}75}.$$

43. Найти x, если

$$\frac{7}{9}\cdot 1\frac{2}{7}+43{,}75:x-3{,}72+1\frac{1}{45}\cdot\left(37{,}5:2\frac{1}{12}-1\frac{3}{23}\cdot 9\right)=9{,}03.$$

44 (устно). Сумма скоростей движения теплохода по течению реки и против течения равна 29 км/ч. Найти скорость теплохода в стоячей воде.

45 (задача-шутка, устно). Летели галки, сели на палки. Сели по одной — галка лишняя, сели по две — палка лишняя. Сколько было галок и сколько было палок?

46. Доказать, что произведение нечетных чисел есть число нечетное.

47. Доказать, что если число не кратно 3, то его квадрат при делении на 3 дает в остатке 1.

48 (задача-шутка, устно). Может ли дробь, числитель которой меньше знаменателя, быть равной дроби, у которой числитель больше знаменателя?

Глава III. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Точные и приближенные значения величин. Метод границ

Числовые значения величин можно получить в результате их измерения. Однако истинное (точное) значение величины найти обычно не удается и можно получить только приближенное ее значение с недостатком и с избытком.

Например, при взвешивании было установлено, что масса тела больше 19 г, но меньше 21 г. Пусть m — числовое значение массы. Тогда $19 < m < 21$; 19 — приближенное значение массы с недостатком, а 21 — ее приближенное значение с избытком. Установлены границы числового значения массы: число 19 — нижняя граница, число 21 — верхняя граница.

Зная границы значения некоторой величины, можно оценить значение другой величины, зависящей от первой.

Пример 1. Дано: $3 < x < 5$. Требуется оценить значение величины $\frac{1}{x}$, т. е. найти границы значения этой величины.

Решение. Так как $3 < x$, то $\frac{1}{3} > \frac{1}{x}$; так как $x > 0$ и $x < 5$, то $\frac{1}{x} > \frac{1}{5}$. Следовательно,

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}.$$

Принято границы числа представлять в виде десятичных дробей.

Заменим границы значения выражения $\frac{1}{x}$ десятичными дробями. При этом $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \approx 0{,}4$ (с избытком). Следовательно,

$$0{,}2 < \frac{1}{x} < 0{,}4.$$

Взяв $\frac{1}{3} \approx 0{,}3$ (с недостатком), получили бы $0{,}2 < \frac{1}{x} < 0{,}3$, что могло бы оказаться неверным для неизвестного нам точного зна-

чения выражения $\frac{1}{x}$. Поэтому нижнюю границу можно заменить только меньшим числом (приближением с недостатком), а верхнюю — только большим числом (приближением с избытком).

Задача. Пусть a и b — приближенные значения числа x, взятые соответственно с недостатком и избытком. Тогда

$$a < x < b. \tag{1}$$

Если c и d — приближенные значения числа y, взятые соответственно с недостатком и избытком, то

$$c < y < d. \tag{2}$$

Найти оценки значений суммы, разности, произведения и частного.

Решение. Применяя к неравенствам (1) и (2) теорему о почленном сложении неравенств одинакового знака (см. § 10 гл. VI), получим

$$a+c < x+y < b+d, \tag{3}$$

т. е. $a+c$ — нижняя граница суммы $x+y$, а $b+d$ — ее верхняя граница.

Аналогично из неравенств (1) и (2) почленным вычитанием получим

$$a-d < x-y < b-c, \tag{4}$$

т. е. получим оценку разности $x-y$.

Пусть $a>0$, $c>0$. Тогда, почленно умножая неравенства (1) и (2), будем иметь

$$ac < xy < bd. \tag{5}$$

Аналогично при условии $a>0$ и $c>0$:

$$\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c}. \tag{6}$$

Неравенства (3), (4), (5), (6) позволяют оценить сумму, разность, произведение и частное с помощью метода границ.

Пример 2. Дано: $2<x<4$, $1<y<3$. Оценить значения $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$.

Решение. Применим неравенства (3), (4), (5), (6):

$$3<x+y<7;\quad -1<x-y<3;\quad 2<xy<12;\quad \frac{2}{3}<\frac{x}{y}<4.$$

Так как $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots\approx 0{,}6$ (с недостатком), то $0{,}6<\frac{x}{y}<4$.

§ 2. Абсолютная и относительная погрешности

Пусть x — точное значение некоторой величины, a — ее приближенное значение, взятое с недостатком или избытком: $x\approx a$.

Разность точного и приближенного значений величины называется *погрешностью приближения.*

Например, $x=4{,}28$; число $a=4{,}2$—приближенное значение числа x с недостатком; число $b=4{,}3$—приближенное значение числа x с избытком. Если взять $x\approx a$, то погрешность приближения

$$x-a=4{,}28-4{,}2=0{,}08.$$

Если взять $x\approx b$, то погрешность приближения

$$x-b=4{,}28-4{,}3=-0{,}02.$$

Погрешность приближения с недостатком всегда положительна, а погрешность приближения с избытком всегда отрицательна.

Абсолютной погрешностью Δ (читается «дельта») приближения называется модуль разности точного и приближенного значений величины:

$$|x-a|=\Delta.$$

Чем меньше абсолютная погрешность, тем ближе приближенное значение величины к ее точному значению.

В рассмотренном примере абсолютная погрешность приближения с недостатком

$$|x-a|=|0{,}08|=0{,}08,$$

а абсолютная погрешность приближения с избытком

$$|x-b|=|-0{,}02|=-(-0{,}02)=0{,}02.$$

Следовательно, лучшим из двух приближенных значений числа x является его приближение с избытком: оно меньше отличается от числа x.

Если $M(x)$ и $A(a)$—две точки числовой или координатной прямой, то расстояние между ними

$$|AM|=|x-a|$$

(по формуле (13) гл. II). Абсолютная погрешность $\Delta=|x-a|$ равна длине отрезка между точками с координатами x и a.

Пример 1. Найти число x, если его приближенное значение $a=0{,}8$ и абсолютная погрешность $\Delta=0{,}01$.

Решение. Так как $|x-a|=\Delta$, то $x=a+\Delta$, либо $x=a-\Delta$ (рис. 7). Поэтому $x=0{,}8+0{,}01=0{,}81$, либо $x=0{,}8-0{,}01=0{,}79$.

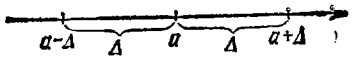


Рис. 7.

Пример 2. Обратить число $x=\frac{1}{3}$ в десятичную дробь и округлить ее соответственно до десятых, сотых и тысячных. В каждом случае найти абсолютную погрешность.

Решение. Так как $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$, то в результате округления до десятых, сотых и тысячных получим значения 0,3; 0,33;

0,333. Находим, что $\left|\frac{1}{3}-0{,}3\right|=\frac{1}{30}$, $\left|\frac{1}{3}-0{,}33\right|=\frac{1}{300}$, $\left|\frac{1}{3}-0{,}333\right|=\frac{1}{3000}$, т. е. с увеличением точности вычислений абсолютная погрешность уменьшается.

Точность приближения $x\approx a$ определяется величиной абсолютной погрешности $\Delta=|x-a|$. Практически точное значение x неизвестно, и, следовательно, точного значения абсолютной погрешности мы обычно не знаем. Поэтому приходится оценивать абсолютную погрешность некоторым положительным числом $h\geqslant\Delta$. Число h называется *границей абсолютной погрешности*: $|x-a|\leqslant h$.

При этом число a называют *приближенным значением числа x с точностью до h* и записывают $x=a\pm h$.

Из условия $|x-a|\leqslant h$ следует, что на координатной прямой точка с координатой x удалена от точки с координатой a не более чем на h, т. е.

$$a-h\leqslant x\leqslant a+h.$$

Пример 3. Найти границы числа $x=10{,}6\pm0{,}5$.

Решение. Так как $a=10{,}6$ и $h=0{,}5$, то

$$10{,}6-0{,}5\leqslant x\leqslant 10{,}6+0{,}5,$$

т. е. $10{,}1\leqslant x\leqslant 11{,}1$.

Пример 4. Известно, что $1{,}56\leqslant x\leqslant 1{,}60$. Вычислить приближенное значение x, равное среднему арифметическому границ, и найти точность приближения.

Решение. Находим, что

$$x\approx\frac{1{,}56+1{,}60}{2},$$

или $x\approx 1{,}58$; $a=1{,}58$. Точность приближения h в этом случае равна полуразности границ, т. е.

$$h=\frac{1{,}60-1{,}56}{2}=0{,}02.$$

Поэтому $x=1{,}58\pm0{,}02$.

Абсолютная погрешность недостаточно характеризует качество измерения или точность вычисления.

Например, при измерении (в сантиметрах) толщины d книги и высоты H стола получили, что $d=3\pm0{,}5$, $H=100\pm0{,}5$. Граница абсолютной погрешности $h=0{,}5$ сама по себе невелика, тем не менее результат измерения толщины книги ($d\approx 3$ см) является по сравнению с результатом измерения стола ($H\approx 100$ см) весьма грубым. Таким образом, чтобы сравнивать точность вычисления (измерения), необходимо знать, какую часть измеряемой величины составляет абсолютная погрешность. Мы приходим к понятию относительной погрешности.

Относительной погрешностью δ приближения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения величины

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} = \frac{|x-a|}{|a|}.$$

Обычно относительную погрешность выражают в процентах.

На практике удобнее пользоваться понятием границы относительной погрешности (аналогично случаю абсолютной погрешности).

Пусть $\Delta \leqslant h$. Тогда число

$$\varepsilon = \frac{h}{|a|}$$

называется *границей относительной погрешности*; при этом $\delta \leqslant \varepsilon$. Так как $h = |a| \cdot \varepsilon$, то запись

$$x = a \pm h$$

может быть представлена в виде

$$x = a(1 \pm \varepsilon).$$

В рассмотренном примере $d = 3 \pm 0{,}5$. Так как $h = 0{,}5$, то $\varepsilon = \frac{0{,}5}{3} = \frac{1}{6} = 0{,}166\ldots$, $\varepsilon \approx 0{,}167$ или $\varepsilon \approx 16{,}7\%$.

Значит, при измерении толщины книги относительная погрешность не превосходит 16,7%. В том же примере $H = 100 \pm 0{,}5$. Отсюда $\varepsilon = \frac{0{,}5}{100} = \frac{1}{200}$ или $\varepsilon = 0{,}5\%$. При измерении высоты стола относительная погрешность не превосходит 0,5%. В этом случае качество измерения выше.

§ 3. Запись приближенных значений чисел. Стандартный вид числа

На практике вычисление абсолютной и относительной погрешностей приближенного значения числа для характеристики его точности производится не только способом, рассмотренным в § 2. Часто точность приближенного значения числа характеризуется указанием количества его верных значащих цифр.

Значащими цифрами десятичной дроби называют все ее цифры, кроме нулей, расположенных левее первой, отличной от нуля цифры.

Например, у чисел 4,321 и 0,0170 значащими являются подчеркнутые цифры. Число значащих цифр равно соответственно четырем и трем.

Значащими цифрами целого числа называют все его цифры, кроме нулей, расположенных в конце числа, если они стоят взамен неизвестных или отброшенных цифр.

Например, число 1234 имеет четыре значащие цифры, точное число 1200 — тоже четыре, приближенное число 500, полученное в результате округления 512, имеет одну значащую цифру (подчеркнутые цифры являются значащими).

Цифра какого-либо десятичного разряда в записи приближенного значения числа называется *верной*, если абсолютная погрешность приближения не превосходит единицы этого разряда.

Сомнительными называют все цифры приближенного значения числа, расположенные правее последней верной цифры.

Пусть, например, $x = 4{,}63 \pm 0{,}05$. Это означает, что число x принадлежит отрезку $[4{,}63 - 0{,}05;\ 4{,}63 + 0{,}05]$, т. е. $4{,}58 \leqslant x \leqslant 4{,}68$.

В записи 4,63 приближенного значения числа x цифра 6 является верной, так как граница абсолютной погрешности $h = 0{,}05$ меньше единицы разряда десятых (неравенство $0{,}05 \leqslant 0{,}1$ верное). Очевидно, что верной будет и цифра 4, расположенная левее цифры 6. В записи 4,63 цифра 3 является сомнительной, так как $h = 0{,}05$ больше единицы разряда сотых (неравенство $0{,}05 \leqslant 0{,}01$ неверное).

За приближенное значение числа x возьмем число 4,6, полученное в результате округления числа 4,63 до десятых, т. е. до первой справа верной цифры.

Правила округления чисел. Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все его цифры, следующие после n-го разряда, или, если это нужно для сохранения разряда, заменяют их нулями. При этом:

1) если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не изменяется;

2) если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу;

3) если же первая из отбрасываемых цифр равна 5 и все остальные отбрасываемые цифры являются нулями, то последняя сохраняемая цифра не изменяется, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Погрешность округления не превосходит пяти единиц первого отброшенного разряда.

В вычислительной практике рекомендуется оставлять в записи приближенного числа только верные цифры, так как все цифры, следующие за верными, увеличивают объем работы без значительного повышения точности вычислений. В такой записи границу абсолютной погрешности можно и не указывать, так как ясно, что абсолютная погрешность не превосходит единицы последнего сохраняемого разряда числа.

Например, запись $x \approx 5{,}32$ означает, что абсолютная погрешность не превосходит 0,01, т. е. $x = 5{,}32 \pm 0{,}01$. Если же $x \approx 5{,}320$, то $x = 5{,}320 \pm 0{,}001$.

В науке и технике часто используются очень большие и очень малые (положительные) числа. Такие числа удобно записывать

в стандартном виде с сохранением только верных цифр, т. е. в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$, а n—целое число.

Например, диаметр Солнца 1 390 600 000 м $= 1{,}3906 \cdot 10^9$ м, диаметр молекулы воды 0,00000003 см $= 3 \cdot 10^{-8}$ см, масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, скорость света $2{,}99793 \cdot 10^8$ м/с и т. п.

В записи приближенного значения числа $x \approx a \cdot 10^n$, представленного в стандартном виде, абсолютная погрешность не превосходит единицы последнего сохраняемого разряда числа, умноженной на 10^n.

Например, запись $x \approx 5{,}3 \cdot 10^3$ означает, что абсолютная погрешность не превосходит $0{,}1 \cdot 10^3$, т. е. $x = 5{,}3 \cdot 10^3 \pm 0{,}1 \cdot 10^3$ или $x = (5{,}3 \pm 0{,}1) \cdot 10^3$. Если $x \approx 5{,}3 \cdot 10^{-3}$, то $x = (5{,}3 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}$.

§ 4. Сложение и вычитание приближенных значений чисел

Пусть a и b—приближенные значения чисел x и y с точностью до h_a и h_b, т. е. $x = a \pm h_a$ или $a - h_a \leqslant x \leqslant a + h_a$, $y = b \pm h_b$ или $b - h_b \leqslant y \leqslant b + h_b$.

Требуется определить границу абсолютной погрешности суммы $a + b$.

Применяя теорему о почленном сложении неравенств, получим

$$a + b - (h_a + h_b) \leqslant x + y \leqslant a + b + (h_a + h_b),$$

т. е.

$$x + y = a + b \pm (h_a + h_b).$$

Таким образом, граница абсолютной погрешности суммы равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых: $h_{a+b} = h_a + h_b$. Это правило верно и для любого конечного числа слагаемых.

Поэтому граница относительной погрешности суммы

$$\varepsilon_{a+b} = \frac{h_a + h_b}{a + b},$$

если $a > 0$, $b > 0$.

Из формулы $h_{a+b} = h_a + h_b$ следует, что если одно из слагаемых имеет абсолютную погрешность, значительно превышающую абсолютные погрешности остальных слагаемых, то точность суммы нельзя повысить за счет увеличения точности этих слагаемых.

Отсюда вытекает практическое правило для подсчета верных цифр при сложении приближенных значений чисел, в записи которых все цифры верные:

1) выделить слагаемое с наименьшим числом верных десятичных знаков (наименее точное слагаемое);

2) округлить остальные слагаемые, оставляя в каждом на один десятичный знак больше, чем в выделенном наименее точном слагаемом;

3) выполнить сложение, учитывая все сохраненные десятичные знаки;

4) округлить полученный результат до предпоследнего знака.

Пример 1. Найти сумму чисел $a_1=0{,}423$; $a_2=72{,}8$ и $a_3=14{,}715$, если все значащие цифры данных чисел верные.

Решение. Слагаемое a_2 имеет наименьшее число верных десятичных знаков (один знак); поэтому оставим его без изменения. Округлим слагаемые a_1 и a_3 до двух десятичных знаков и сложим все полученные числа:

$$0{,}42+72{,}8+14{,}72=87{,}94.$$

Округляя найденный результат до одного десятичного знака, получим 87,9—сумму данных чисел.

Аналогично находится граница абсолютной погрешности разности приближенных значений чисел:

$$h_{a-b}=h_a+h_b.$$

Поэтому граница относительной погрешности разности

$$\varepsilon_{a-b}=\frac{h_a+h_b}{|a-b|}.$$

Отсюда следует, что при вычитании достаточно близких друг к другу приближенных чисел a и b величина ε_{a-b} может оказаться очень большой, т. е. может произойти потеря точности.

Например, если $a=1{,}234$, $b=1{,}238$ и $h_a=h_b=0{,}001$, то

$$\varepsilon_{a-b}=\frac{0{,}001+0{,}001}{|1{,}234-1{,}238|}=\frac{0{,}002}{0{,}004}=\frac{1}{2}$$

или $\varepsilon_{a-b}=50\%$. Поэтому избегают выполнять вычитание двух почти равных приближенных чисел.

Практическое правило подсчета верных цифр при вычитании такое же, как при сложении.

Пример 2. Найти разность $x-y$, если $x\approx 7{,}25$; $y\approx 3{,}8245$.

Решение. Округлим число 3,8245 до трех десятичных знаков: $3{,}8245\approx 3{,}824$. Находим

$$7{,}25-3{,}824=3{,}426.$$

Округляя найденный результат до двух знаков, получим 3,43—разность данных чисел.

§ 5. Умножение и деление приближенных значений чисел

Пусть $x=a+h_a$, $y=b+h_b$, причем $a>0$, $b>0$. Требуется определить границу абсолютной погрешности произведения ab.

Числа x и y заключены в границах:

$$a-h_a\leqslant x\leqslant a+h_a,\quad b-h_b\leqslant y\leqslant b+h_b.$$

Допустим, что $a-h_a>0$; $b-h_b>0$. Тогда, применяя теорему о почленном умножении неравенств, получим

$$ab-ah_b-bh_a+h_ah_b\leqslant xy\leqslant ab+ah_b+bh_a+h_ah_b.$$

Пренебрегая в этом неравенстве произведением $h_a h_b$, находим, что приближенно

$$xy = ab \pm (ah_b + bh_a).$$

Таким образом,

$$h_{ab} = ah_b + bh_a.$$

Используя оценку для границы абсолютной погрешности произведения, имеем оценку для границы относительной погрешности

$$\varepsilon_{ab} = \frac{ah_b + bh_a}{ab} = \frac{h_a}{a} + \frac{h_b}{b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b.$$

Граница относительной погрешности произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

Во многих задачах абсолютная погрешность является малой величиной сравнительно с точным и приближенным значениями. Если h_a и h_b малы по сравнению с a и b, то можно пренебречь членом $h_a h_b$ и применить полученные выше оценки для величин h_{ab} и ε_{ab}.

Отсюда вытекает практическое правило для подсчета верных цифр при умножении:

1) выделить сомножитель с наименьшим числом верных значащих цифр;

2) округлить остальные сомножители, оставляя в каждом на одну значащую цифру больше, чем в выделенном наименее точном сомножителе;

3) выполнить умножение, учитывая все сохраненные значащие цифры;

4) сохранить в полученном результате столько значащих цифр, сколько их имеет выделенный сомножитель.

Пример 1. Найти произведение чисел $x \approx 3{,}491$ и $y \approx 8{,}6$.

Решение. Сомножитель 8,6 имеет наименьшее число верных значащих цифр, равное двум. Поэтому округлим число 3,491 до трех значащих цифр: $3{,}491 \approx 3{,}49$.

Найдем произведение $3{,}49 \cdot 8{,}6 = 30{,}014$.

Сохраняя две значащие цифры, получим 30—произведение данных чисел.

Приведем без доказательства формулу для оценки границы относительной погрешности частного: $\varepsilon_{a/b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$. На практике сначала находят границу относительной погрешности частного, а затем—границу абсолютной погрешности частного.

Практическое правило подсчета верных цифр при делении такое же, как при умножении.

Пример 2. Найти частное $\frac{x}{y}$, если $x \approx 39{,}57$; $y \approx 42{,}6137$.

Решение. Округлим число 42,6137 до пяти значащих цифр: $42{,}6137 \approx 42{,}614$. Находим

$$\frac{39{,}57}{42{,}614} = 0{,}928568$$

и округляем до четырех значащих цифр: 0,9286—частное от деления данных чисел.

При вычислении промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем в рассмотренных выше правилах, причем в окончательном результате запасную цифру не учитывать.

Пример 3. Вычислить значение выражения $x+yz$, если $x \approx 104{,}367$; $y \approx 14{,}8$; $z \approx 0{,}73$.

Решение. Значение $yz \approx 14{,}8 \cdot 0{,}73 = 10{,}804$. При вычислении произведения мы получили бы 11 (оставляя две цифры), а так как теперь это промежуточный результат, то сохраняем одну запасную цифру и получаем 10,8. Поэтому

$$x + yz \approx 104{,}367 + 10{,}8$$

или $x+yz \approx 104{,}37 + 10{,}8 = 115{,}17 \approx 115$.

В окончательном результате произведено округление до целых, так как в наименее точном слагаемом (10,8) цифра десятых — запасная и не учитывается.

Замечание. При возведении в степень и извлечении корня в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет основание степени и соответственно подкоренное число.

Упражнения

1. Найти границы значения выражения $\frac{1}{x} - 2$, если $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$.

2. Найти нижнюю и верхнюю границы (с точностью до десятых долей) значения выражения $\frac{2}{x}$, если $6 < x < 7$.

3. Оценить значения $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$, если $5 < x < 6$, $2 < y < 3$.

4. Число 5,84 округлить до десятых долей с недостатком и с избытком. В каждом из случаев найти абсолютную погрешность приближения.

5. Найти абсолютную погрешность округления числа $\frac{2}{7}$ с избытком и с недостатком.

6. Найти число x, если его приближенное значение $a=2{,}4$ и абсолютная погрешность $\Delta = 0{,}01$.

7. Обратить число $x=\frac{2}{3}$ в десятичную дробь и округлить ее до десятых; сотых; тысячных долей. В каждом случае найти абсолютную погрешность.

8. Найти границы приближения числа $y = 22{,}7 \pm 0{,}5$.

9. Вычислить приближенное значение x, равное среднему арифметическому границ, и найти точность приближения, если $8{,}442 \leqslant x \leqslant 8{,}444$.

10. Даны два результата измерения длины, выраженные в см: $l_1 = 15 \pm 0{,}5$ и $l_2 = 140 \pm 0{,}5$. Какое измерение точнее?

11. Найти границу относительной погрешности (в процентах) величины $x = 0{,}23 \pm 0{,}005$.

12. По границе относительной погрешности $\varepsilon = 0{,}4\%$ приближенного числа $a = 40{,}2$ установить его абсолютную погрешность и границы, между которыми находится само приближенное число.

13. Приближенное значение величины x заключено между 17,32 м и 17,36 м. С какой точностью произведено измерение?

14. Какое из двух приближенных значений числа π точнее: 3,14 или $3\frac{1}{7}$?

15. Известно, что $x = 83{,}4 \pm 0{,}5$. Какие цифры в записи приближенного числа x являются верными?

16. Округлить число $x = 15{,}28 \pm 0{,}05$ до первой справа верной цифры.

17. Число 2,7182818 округлить до 6; 5; 1 значащих цифр.

18. В чем разница между записями 8 кг и 8,0 кг?

19. Числа 28,4501; 28,450; 28,5500 округлить до десятых долей.

20. Дробь $\frac{3}{7}$ обратить в десятичную с точностью до 0,001.

21. Что означает запись $x \approx 4{,}26$? $x \approx 4{,}260$?

22. Что означает запись $x \approx 2{,}1 \cdot 10^5$? $x \approx 2{,}100 \cdot 10^5$?

23. Записать число $x \approx 3{,}9 \cdot 10^{-2}$ с помощью границы абсолютной погрешности.

24. Найти приближенные значения суммы и разности чисел:

а) $a \approx 2{,}38$ и $b \approx 15{,}41$; б) $a \approx 7{,}2$ и $b \approx 4{,}25$.

25. Найти значение выражения $a - b + c$, если $a \approx 27{,}345$, $b \approx 13{,}8$, $c \approx 5{,}23$.

26. Найти приближенные значения произведения и частного чисел $x \approx 2{,}05$ и $y \approx 12$.

27. Найти значение выражения $\frac{xy}{z}$, если $x \approx 14{,}2$, $y \approx 0{,}2215$, $z \approx 4{,}8$.

28. Найти значение выражения $ab - c$, если $a \approx 2{,}9$, $b \approx 13{,}5$, $c \approx 7{,}563$.

29. Найти значение выражения $x + \frac{y}{z}$, если $x \approx 121{,}34$, $y \approx 271{,}3$, $z \approx 34{,}5$.

30. Найти значение $\sqrt{x}$, если $x \approx 13{,}24$.

31. Найти значение a^3, если $a \approx 3{,}4$.

32. Найти сумму $1\frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{3}{11}$ с двумя точными десятичными знаками.

33. Найти объем комнаты, если ее размеры следующие: высота $h \approx 2{,}8$ м, ширина $a \approx 3{,}4$ м, длина $l \approx 4{,}6$ м.

34. Сколько весит воздух, содержащийся в комнате, размеры которой указаны в предыдущей задаче, если 1 м^3 его весит $(1{,}29 \pm 0{,}01)$ кг?

35. Расстояние между двумя точками на карте $l \approx 14{,}3$ см. Определить действительное расстояние между этими точками, если масштаб карты 1:2500 000.

36. На окраску пола в комнате длиной $a \approx 5{,}2$ м и шириной $b \approx 4{,}8$ м пошло 2,35 кг краски. Сколько кг краски потребуется для окраски пола в комнате длиной $x \approx 6{,}1$ м и шириной $y \approx 5{,}0$ м?

37. Найти силу тока на участке цепи, если его сопротивление $R \approx 3{,}2$ ом и напряжение на этом участке $U \approx 0{,}3$ в.

38. Вычислить путь, пройденный телом при равноускоренном движении, по формуле $S = \frac{at^2}{2}$, если $a \approx 4{,}3$ м/с^2, $t \approx 4$ с.

39. Вычислить ускорение a движения тела по формуле $a=\frac{v_t-v_0}{t}$, если $v_t \approx 48{,}5$ м/с, $v_0 \approx 21$ м/с, $t \approx 25$ с.

40. Вычислить приближенное значение выражения, ограничиваясь при обращении обыкновенных дробей в десятичные точностью до 0,01,

$$\left(2\frac{13}{16}+1\frac{7}{8}\right):\left(2\frac{13}{16}-1\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{2}{7}.$$

Глава IV. СТЕПЕНИ И КОРНИ. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Возведение рациональных чисел в степень с натуральным показателем. Извлечение корня

Для рациональных чисел вводятся арифметические действия, а также действия возведения в степень и извлечения корня.

Пусть a — рациональное число, n — натуральное число.

Определение. *Степенью числа a с натуральным показателем n ($n \geqslant 2$)* называется произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$$a^n=\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}}$$

Кроме того, по определению $a^1=a$.

При этом число a называют *основанием* степени, число n — *показателем* степени, результат возведения в степень (a^n) называют степенью с натуральным показателем.

Для второй и третьей степени числа используются сокращенные названия: $a^2=aa$ называют *квадратом* числа a (или a в квадрате); $a^3=aaa$ называют *кубом* числа a (или a в кубе).

Из определения вытекает:

1) четная степень отрицательного числа есть число положительное; например $(-5)^{20}>0$;

2) нечетная степень отрицательного числа есть число отрицательное; например $\left(-\frac{2}{3}\right)^{15}<0$;

3) любая степень положительного числа есть число положительное: $a^n>0$, если $a>0$;

4) при возведении нуля в степень с любым натуральным показателем получается нуль: $0^n=0$;

5) при возведении единицы в степень с любым натуральным показателем получается единица: $1^n=1$.

Основные свойства степени с натуральным показателем будут рассмотрены в § 4 гл. IV.

Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия возведения в степень, затем умножение и деление в порядке их записи и, наконец, сложение и вычитание также в по-

рядке их записи. Например, $3\cdot 5^2-16:2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+26=3\cdot 25-$ $-16:2\cdot\frac{1}{8}+26=75-8\cdot\frac{1}{8}+26=100$.

Извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень.

Определение. *Корнем*, или *радикалом*, n-й степени ($n\geqslant 2$) из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

Корень n-й степени из числа a обозначается через $\sqrt[n]{a}$. Запись $\sqrt[n]{a}=b$ означает, что $b^n=a$. При этом натуральное число n ($n\geqslant 2$) называют *показателем* корня, число a — *подкоренным числом* или *подкоренным выражением*.

Если $n=2$, то корень называют *квадратным*; в этом случае показатель корня не пишется. Например, вместо $\sqrt[2]{7}$ пишут $\sqrt{7}$. Если $n=3$, то корень называют *кубическим*.

На множестве рациональных чисел действие извлечения корня не всегда выполнимо. Например, не существует рационального числа, равного квадратному корню из 2. Докажем это.

Предположим противное, что $\sqrt{2}$ — рациональное число:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

где p и q — целые числа, причем $q\neq 0$. Дробь $\frac{p}{q}$ будем считать несократимой (этого всегда можно добиться, применяя основное свойство дроби).

Согласно определению корня

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2 \quad \text{или} \quad p^2=2q^2,$$

т. е. p — четное число: $p=2p_1$, где p_1 — целое. Тогда $(2p_1)^2=2q^2$ или $q^2=2p_1^2$, т. е. q — также четное число: $q=2q_1$, где q_1 — целое. Следовательно, дробь $\frac{p}{q}=\frac{2p_1}{2q_1}$ сократима, что противоречит условию.

Из полученного противоречия вытекает, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Определение. Рациональное число $b>0$ называется *приближенным значением корня* $\sqrt[n]{a}$ ($a>0$) *с недостатком с точностью до* α (α — положительное рациональное число), если

$$b^n<a<(b+\alpha)^n.$$

При этом число $b+\alpha$ называется *приближенным значением корня* $\sqrt[n]{a}$ *с избытком с точностью до* α.

Доказано, что приближенные значения корней из положительных чисел всегда существуют для любого рационального числа $\alpha>0$.

Пример 1. Извлечь $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{7}$.

Решение. Заметим, что $2=\frac{2\cdot 7^2}{7^2}=\frac{98}{49}$; $\sqrt{2}=\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{49}}=\frac{\sqrt{98}}{7}$. Поэтому достаточно извлечь корень $\sqrt{98}$ с точностью до 1 и разделить полученное число на 7. Так как $\sqrt{98}\approx 9$ (с точностью до 1), то $\sqrt{2}\approx\frac{9}{7}$ $\left(\text{с точностью до } \frac{1}{7}\right)$.

В самом деле,

$$\left(\frac{9}{7}\right)^2<2<\left(\frac{9}{7}+\frac{1}{7}\right)^2.$$

За меру точности α чаще всего принимают $\frac{1}{10^m}$ (m — некоторое натуральное число), а за приближенное значение корня принимают десятичную дробь с m знаками после запятой.

Рассмотрим на примерах правило приближенного вычисления квадратного корня из числа.

Пример 2. Извлечь $\sqrt{72{,}6115}$ с точностью до 0,01.

Решение. Выполним следующие действия:

1) число под корнем разобьем на грани по две цифры: целую часть разобьем на грани по две цифры справа налево, а дробную часть — по две цифры слева направо: $\sqrt{72',61'15}$;

2) извлечем с точностью до 1 квадратный корень из первой грани, т. е. из числа 72, и перенесем вторую грань (61):

$$\begin{array}{l}\sqrt{72',61'15}=8,\ldots;\\ -64\\ \hline 861\end{array}$$

3) удвоим найденный корень и запишем результат слева:

$$\begin{array}{l}\sqrt{72',61'15}=8,\ldots;\\ -64\\ \hline 16\ |\ 861\end{array}$$

4) к числу 16 припишем справа такую наибольшую цифру, чтобы произведение полученного трехзначного числа на эту цифру не превосходило 861. В нашем примере этой цифрой будет 5: $165\cdot 5=825<861$. Получим

$$\begin{array}{l}\sqrt{72',61'15}=8{,}5\ldots;\\ -64\\ \hline 165\ |\ 861\\ 5\ |\ -825\\ \hline \quad 36\end{array}$$

5) удвоим найденный корень, перенесем третью грань (15) и поступаем так же, как в п. 4):

$$\begin{array}{rl|l}
 & \sqrt{72',61'15} = 8{,}52\ldots & \\
 & -64 & \\
\hline
165 & 861 & \\
5 & -825 & \\
\hline
1702 & 3615 & \\
2 & -3404 & \\
\hline
 & 211 & \text{(остаток)}
\end{array}$$

Корень $\sqrt{72{,}6115} \approx 8{,}52$ (с недостатком, с точностью до 0,01), т. е. $8{,}52^2 < 72{,}6115 < (8{,}52+0{,}01)^2$.

Пример 3. Найти приближенное значение $\sqrt{113{,}5}$ с избытком с точностью до 0,001.

Решение. Запишем: $\sqrt{113{,}5} = \sqrt{1'13',50'00'00}$. Далее действия выполняются аналогично действиям при решении примера 2:

$$\begin{array}{rl|l}
 & \sqrt{1'13',50'00'00} = 10{,}653\ldots & \\
 & -1 & \\
\hline
20 & 13 & \\
206 & 1350 & \\
6 & -1236 & \\
\hline
2125 & 11400 & \\
5 & -10625 & \\
\hline
21303 & 77500 & \\
3 & -63909 & \\
\hline
 & 13591 &
\end{array}$$

Корень $\sqrt{113{,}5} \approx 10{,}653$ (с недостатком, с точностью до 0,01); $\sqrt{113{,}5} \approx 10{,}654$ (с избытком, с точностью до 0,001).

Для практических вычислений составляются специальные таблицы, в которых приводятся квадраты и кубы чисел и приближенные значения квадратных и кубических корней (например, четырехзначные математические таблицы В. М. Брадиса).

§ 2. Понятие иррационального числа

Будем извлекать квадратный корень из 2 с точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ..., $\frac{1}{10^n}$ и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим в результате бесконечную десятичную дробь: $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ Эта дробь не может быть периодической, так как по доказанному в § 1 $\sqrt{2}$ не является рациональным числом, и мы знаем (§ 5 гл. II), что периодическая дробь изображает только рациональное число.

Таким образом, при извлечении корней появляются бесконечные непериодические десятичные дроби. Дроби такого типа определяют новые, нерациональные числа.

Определение. Всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь вида

$$a = c,b_1b_2\ldots b_n\ldots$$

($c \geqslant 0$; $b_1, b_2, \ldots$ — цифры) называется *положительным иррациональным* числом.

Каждому положительному иррациональному числу a сопоставляется противоположное ему отрицательное число $-a = -c,b_1b_2\ldots b_n\ldots$

Определение. Два иррациональных числа

$$a = c,b_1b_2\ldots b_n\ldots \quad \text{и} \quad a' = c',b_1'b_2'\ldots b_n'\ldots$$

считаются *равными* в том и только в том случае, если $c = c_1'$, $b_1 = b_1'$, $b_2 = b_2', \ldots, b_n = b_n', \ldots$ и т. д.

Из двух положительных чисел число a *больше* числа a', если $c > c'$ либо если $c = c'$, но $b_1 > b_1'$, либо если $c = c_1'$ и $b_1 = b_1'$, но $b_2 > b_2'$ и т. д.

Если $a > a' > 0$, *то считают, что* $-a < -a'$ и наоборот.

Пусть $a = c,b_1b_2\ldots b_n\ldots > 0$. Дроби c,b_1; c,b_1b_2 и т. д. называются *десятичными приближениями для иррационального числа* a *по недостатку*. Дроби c,b_1+1; $c,b_1(b_2+1)$ и т. д., полученные увеличением на единицу последнего оставляемого десятичного знака числа a, называются *десятичными приближениями для иррационального числа* a *по избытку*.

Для сравнения иррационального числа с числом рациональным последнее можно представить в виде периодической дроби, и затем можно сравнить десятичные приближения для этих чисел по тому же правилу, как и при сравнении двух иррациональных чисел. При этом конечная десятичная дробь рассматривается как периодическая с периодом нуль.

Например, $\sqrt{2} > 1{,}41$, так как $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, а $1{,}41 = 1{,}4100\ldots$

Примером иррациональных чисел могут служить квадратные и кубические корни из натуральных чисел, не являющихся соответственно квадратами или кубами натуральных чисел:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots; \quad \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}, \ldots$$

Иррациональные числа получаются не только при извлечении корней. Например, число $\pi = 3{,}14\ldots$, равное отношению длины окружности к ее диаметру, является иррациональным числом. Значения логарифмов положительных чисел и тригонометрических функций, как правило,— иррациональные числа.

Над иррациональными числами устанавливаются арифметические действия, причем вычитание и деление определяются как действия, обратные сложению и умножению. Для иррациональных чисел сохраняются основные свойства арифметических действий над рациональными числами. Строгое обоснование этих действий и их свойств приводится в курсе высшей математики.

§ 3. Действительные числа. Арифметические корни. Прямоугольная система координат на плоскости

Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел образует множество *действительных* (или вещественных) чисел.

Таким образом, «действительное (или вещественное) число» обозначает число рациональное либо иррациональное. Каждое действительное число можно приближенно заменить конечной десятичной дробью.

Над действительными числами установлены арифметические действия: сложение, вычитание, умножение, деление. Основные свойства арифметических действий, приведенные в § 1 гл. II для целых чисел, остаются справедливыми и для действительных чисел.

Сумма или разность рационального и иррационального чисел всегда есть число иррациональное. Это верно и для произведения или частного, если только рациональное число не равно нулю.

Однако арифметические действия над двумя иррациональными числами могут привести к рациональным числам. Например,

$$(5+\sqrt{2})-\sqrt{2}=5, \quad \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=3.$$

Любое действительное число можно представить в виде суммы двух слагаемых, причем различными способами. Например, число 27,2 можно представить в виде суммы чисел 10 и 17,2 или 20 и 7,2, или 27 и 0,2, или —3 и 30,2 и т. д. Будем представлять действительное число в виде суммы таких двух слагаемых, одно из которых является целой частью данного числа, а другое — дробной частью.

Определение. *Целой частью числа* x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть числа x обозначается $[x]$. Например,

$$[27{,}2]=27, \quad [0{,}54]=0, \quad [-3]=-3, \quad [-4{,}5]=-5.$$

Если x — целое число, то $[x]=x$. Если x — нецелое число, то $[x]<x$; в этом случае число x заключено между двумя последовательными целыми числами: $[x]<x<[x]+1$. Таким образом, при любом x верно неравенство: $[x]\leqslant x<[x]+1$.

Определение. *Дробной частью числа* x называется разность между числом x и его целой частью. Дробная часть числа x обозначается $\{x\}$. Таким образом, $\{x\}=x-[x]$. Например,

$$\{27{,}2\}=27{,}2-[27{,}2]=0{,}2; \quad \{0{,}54\}=0{,}54-[0{,}54]=0{,}54;$$
$$\{-3\}=-3-[-3]=0; \quad \{-4{,}5\}=-4{,}5-[-4{,}5]=-4{,}5-(-5)=0{,}5.$$

Так как $[x]\leqslant x<[x]+1$, то $0\leqslant x-[x]<1$, т. е. при любом x верно неравенство $0\leqslant\{x\}<1$. Дробная часть числа есть неотрицательное число, меньшее 1.

Согласно определению дробной части числа $\{x\}=x-[x]$. Отсюда $x=[x]+\{x\}$, т. е. любое число можно представить в виде суммы его целой и дробной частей. Например,

$$27{,}2=27+0{,}2;\quad 0{,}54=0+0{,}54;\quad -3=-3+0;\quad -4{,}5=-5+0{,}5.$$

Возведение в степень с натуральным показателем и извлечение корня для действительных чисел определяются так же, как и для рациональных чисел.

Пусть a — действительное, n — натуральное число. По определению

$$a^n=\begin{cases}\underbrace{aaa\ldots a}_{n\text{ раз}}, & \text{если } n\geqslant 2;\\ a, & \text{если } n=1\end{cases}$$

и

$$\sqrt[n]{a}=b,\ \text{если}\ b^n=a\ (n\geqslant 2).$$

Наряду с натуральным показателем рассматриваются также степени с любым действительным показателем. Это обобщение понятия о показателе степени будет введено в §§ 6, 8 и 9 гл. IV.

Для действительных чисел извлечение корня $\sqrt[n]{a}$ всегда выполнимо, кроме случая, когда n четно и $a<0$. Однако это действие не всегда однозначно.

Например, $\sqrt{16}=4$ и $\sqrt{16}=-4$, так как $4^2=(-4)^2=16$. Нам пришлось бы писать, что $\sqrt{16}=\pm 4$. Чтобы устранить двузначность корня, вводится понятие арифметического корня.

Определение. *Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a* называется неотрицательное число b, для которого $b^n=a$.

В дальнейшем будем рассматривать только арифметическое значение корня, т. е. $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл лишь при $a\geqslant 0$ и принимает только неотрицательные значения. Например, $\sqrt{16}=4$ есть арифметическое значение квадратного корня из 16.

Арифметическое значение корня существует для каждого $a\geqslant 0$. Докажем его единственность.

Пусть $\sqrt[n]{a}=b_1$ и $\sqrt[n]{a}=b_2$, где $a\geqslant 0$, $b_1\geqslant 0$, $b_2\geqslant 0$. Тогда $b_1^n=b_2^n=a$.

Если $b_1\neq b_2$, например $b_1<b_2$, то $b_1^n<b_2^n$ по свойству неравенств (см. § 10 гл. VI), что неверно. Из полученного противоречия следует единственность арифметического корня, т. е. $b_1=b_2$.

Если x — действительное число, то $|x|$ — модуль (или абсолютная величина) числа x. По определению

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Основные свойства модулей рациональных чисел, доказанные в § 6 гл. II, остаются справедливыми и для модулей действительных чисел.

Действительные числа, как и рациональные числа, можно изобразить точками на числовой или координатной прямой.

Пусть x_1 и x_2 — действительные числа, а $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — соответствующие им точки, расположенные на числовой прямой.

Справедлива формула для расстояния между любыми двумя точками на числовой прямой:

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|, \qquad (1)$$

где $|M_1M_2|$ — длина отрезка M_1M_2. Эта формула доказывается так же, как в случае рациональных чисел x_1 и x_2.

Перейдем от прямой к плоскости.

Две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом O образуют прямоугольную систему координат на плоскости. Горизонтальная ось называется *осью абсцисс* или осью Ox, вертикальная — *осью ординат* или осью Oy (рис. 8). Плоскость, на которой выбрана система координат, называют *координатной плоскостью*.

Координатная плоскость делится осями на четыре части, называемые *координатными четвертями* или квадрантами. Их нумерация показана на рисунке. Прямые углы, образуемые осями координат, называют *координатными углами*.

Пусть M — произвольная точка координатной плоскости. Спроектируем ее на ось абсцисс и ось ординат, т. е. опустим из этой точки перпендикуляры на оси координат (см. рис. 8).

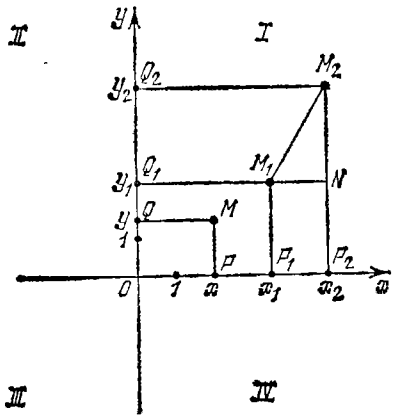


Рис. 8.

Определение. Координата проекции точки M на ось Ox называется *абсциссой* точки M, координата проекции точки M на ось Oy называется *ординатой* точки M.

Абсциссу и ординату точки M называют *координатами* точки M. При этом записывают $M(x; y)$ (на первом месте всегда пишут абсциссу).

Таким образом, каждой точке M координатной плоскости соответствует *упорядоченная пара чисел* $(x; y)$ — ее координаты.

Наоборот, каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M координатной плоскости с координатами $(x; y)$. Значит, координаты x и y определяют положение точки на плоскости.

В самом деле, на оси абсцисс отметим точку с координатой x и проведем через нее перпендикуляр к этой оси; на оси орди-

нат—точку с координатой y и проведем через нее перпендикуляр к оси ординат. Пересечение этих перпендикуляров и дает искомую точку M (на рис. 8 показан случай, когда $x>0$ и $y>0$).

Если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю. Если точка лежит на оси ординат, то ее абсцисса равна нулю. Справедливы и обратные утверждения. Начало координат имеет абсциссу и ординату, равные нулю: O (0; 0).

Пусть на координатной плоскости даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Для нахождения расстояния между ними справедлива следующая формула:

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (2)$$

Для доказательства рассмотрим прямоугольный треугольник M_1M_2N, в котором, согласно формуле (1), длина катета M_1N равна $|x_2-x_1|$ и длина катета M_2N равна $|y_2-y_1|$. По теореме Пифагора

$$|M_1M_2|=\sqrt{|M_1N|^2+|M_2N|^2}=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}=$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Формула (2) верна и в том случае, когда $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$. Тогда эта формула дает либо

$$|M_1M_2|=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|,$$

либо

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|.$$

Например, найдем расстояние между точками $M_1(1; 3)$ и $M_2(-3; 0)$. Согласно формуле (2)

$$|M_1M_2|=\sqrt{(-3-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

Если точка M имеет координаты $(x; y)$, то ее расстояние от оси Ox равно $|y|$, расстояние от оси Oy равно $|x|$, а от точки O—$\sqrt{x^2+y^2}$: $|MP|=|y|$; $|MQ|=|x|$, $|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$.

§ 4. Степень с натуральным показателем

По определению степени с натуральным показателем n

$$a^n=\begin{cases}\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ раз}}, & \text{если } n\geqslant 2,\\ a, & \text{если } n=1\end{cases}$$

(основание степени a—любое действительное число). Докажем следующие свойства возведения в степень:

1) *При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются*, т. е.

$$a^ma^n=a^{m+n} \quad (m, n\text{—натуральные числа}).$$

Доказательство.

$$a^m a^n = \underbrace{(aa \ldots a)}_{m \text{ раз}} \underbrace{(aa \ldots a)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{aa \ldots a}_{(m+n) \text{ раз}}$$

(по сочетательному свойству умножения). Значит, $a^m a^n = a^{m+n}$.

2) *При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются*, т. е.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0;\ m,\ n \text{—натуральные числа},\ m > n).$$

Доказательство.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{aa \ldots a}^{m \text{ раз}}}{\underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}}}.$$

Сократим дробь и получим

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{aa \ldots a}^{(m-n) \text{ раз}}}{1} = a^{m-n}.$$

Замечание. Если $m < n$, то $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$; если $m = n$, то $a^m : a^n = 1$.

Таким образом,

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{если } m > n, \\ 1, & \text{если } m = n, \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{если } m < n \end{cases} \quad (a \neq 0).$$

3) *При возведении степени в степень показатели степеней умножаются*, т. е.

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m,\ n \text{—натуральные числа}).$$

Доказательство.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n \text{ раз}} = a^{\overbrace{m+m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}}$$

(по свойству умножения степеней с одинаковыми показателями).

Значит, $(a^m)^n = a^{mn}$.

4) $$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{если } n \text{—четное}, \\ -a^n, & \text{если } n \text{—нечетное}. \end{cases}$$

Это свойство сразу вытекает из определения степени с натуральным показателем.

5) *При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель*, т. е.

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (n\text{—натуральное число}).$$

Доказательство.

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n\text{ раз}} = \underbrace{(aa\ldots a)}_{n\text{ раз}}\underbrace{(bb\ldots b)}_{n\text{ раз}}$$

(по сочетательному и переместительному свойствам умножения). Значит, $(ab)^n = a^n b^n$.

6) *При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель дроби*, т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0,\ n\text{—натуральное число}).$$

Доказательство.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ раз}} = \frac{\overbrace{aa\ldots a}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ раз}}}$$

(по правилу умножения дробей). Значит, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Покажем применение этих свойств при выполнении вычислений и тождественных преобразований.

Пример 1. Вычислить $\frac{15^3\cdot 21^2}{35^2\cdot 3^4}$.

Решение.

$$\frac{15^3\cdot 21^2}{35^2\cdot 3^4} = \frac{(3\cdot 5)^3\cdot(3\cdot 7)^2}{(5\cdot 7)^2\cdot 3^4} = \frac{3^3\cdot 5^3\cdot 3^2\cdot 7^2}{5^2\cdot 7^2\cdot 3^4} = \frac{3^5\cdot 5^3\cdot 7^2}{3^4\cdot 5^2\cdot 7^2} = 3\cdot 5 = 15.$$

Пример 2. Найти значение выражения $(-1{,}4)^3\cdot\left(3\frac{4}{7}\right)^3$.

Решение. $(-1{,}4)^3\cdot\left(3\frac{4}{7}\right)^3 = -(1{,}4)^3\cdot\left(\frac{25}{7}\right)^3 = -\left(1{,}4\cdot\frac{25}{7}\right)^3 =$
$= -\left(\frac{14}{10}\cdot\frac{25}{7}\right)^3 = -(5^3) = -125.$

Пример 3. Выполнить действия: $\frac{(-2)\cdot(-3)^{17}-(-3)^{16}}{9^7\cdot 15}$.

Решение.

$$\frac{(-2)\cdot(-3)^{17}-(-3)^{16}}{9^7\cdot 15} = \frac{(-2)\cdot(-3^{17})-3^{16}}{9^7\cdot 15} =$$
$$= \frac{2\cdot 3^{17}-3^{16}}{9^7\cdot 15} = \frac{3^{16}(2\cdot 3-1)}{(3^2)^7\cdot 3\cdot 5} = \frac{3^{16}(6-1)}{3^{14}\cdot 3\cdot 5} = \frac{3^{16}\cdot 5}{3^{15}\cdot 5} = 3.$$

Пример 4. Расположить в порядке возрастания следующие числа: $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$; $0{,}3^2$; $(-1{,}2)^2$.

Решение. Найдем

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\left(\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64};\quad \left(-\frac{2}{5}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}=0{,}16;$$

$$(0{,}3)^2=0{,}09;\quad (-1{,}2)^2=(1{,}2)^2=1{,}44.$$

Отсюда

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3<0{,}3^2<\left(-\frac{2}{5}\right)^2<(-1{,}2)^2.$$

Пример 5. Какое из чисел больше:

а) 2^{300} или 3^{200}; б) 54^4 или 21^{12}; в) $(0{,}4)^4$ или $(0{,}8)^3$?

Решение. а) $2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}$, $3^{200}=(3^2)^{100}=9^{100}$; отсюда $3^{200}>2^{300}$.

б) $54^4=(2\cdot 27)^4=(2\cdot 3^3)^4=2^4\cdot 3^{12}$, $21^{12}=(3\cdot 7)^{12}=3^{12}\cdot 7^{12}=$ $=(7^3)^4\cdot 3^{12}=(343)^4\cdot 3^{12}$; отсюда $21^{12}>54^4$.

в) $(0{,}4)^4=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}$, $(0{,}8)^3=\left(\frac{4}{5}\right)^3=\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot 2^3=\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot 8$; отсюда $(0{,}8)^3>(0{,}4)^4$.

§ 5. Арифметический квадратный корень

Определение. *Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа* a называется неотрицательное число b, квадрат которого равен a: $\sqrt{a}=b$.

Например, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{0}=0$. Знак $\sqrt{\ }$ называется *знаком арифметического квадратного корня*; a называется *подкоренным выражением* (или *подкоренным числом*). Выражение $\sqrt{a}$ читается так: арифметический квадратный корень из числа a или, короче, корень квадратный из a $(a\geqslant 0)$.

Из определения арифметического квадратного корня следует:

1) выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a\geqslant 0$;

2) для любого числа $a\geqslant 0$ выполняется неравенство $\sqrt{a}\geqslant 0$;

3) для любого числа $a\geqslant 0$ выполняется равенство $(\sqrt{a})^2=a$.

Для того чтобы доказать, что b является арифметическим квадратным корнем из числа $a\geqslant 0$, следует проверить выполнение двух условий:

1) $b\geqslant 0$; 2) $b^2=a$.

Например, $\sqrt{25}=5$, так как $5^2=25$ и $5>0$.

Теорема. *Из любого действительного числа* $a\geqslant 0$ *можно извлечь арифметический квадратный корень и притом только один.*

Мы не станем доказывать, что $\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$ существует (доказательство этого утверждения трудное). Докажем единственность арифметического квадратного корня.

Пусть $\sqrt{a}=b_1$ и $\sqrt{a}=b_2$, где $a\geqslant 0$, $b_1\geqslant 0$, $b_2\geqslant 0$. Тогда $b_1^2=b_2^2=a$.

Если $b_1\neq b_2$, например $b_1<b_2$, то $b_1^2<b_2^2$ по свойству неравенств с неотрицательными членами, и мы пришли к противоре-

чию с равенством $b_1^2 = b_2^2$. Из полученного противоречия следует единственность арифметического квадратного корня, т. е. $b_1 = b_2$.

Теорема. *Для любого действительного числа* a

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1) если $a \geqslant 0$, то по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{a^2} = a$;

2) если $a < 0$, то $(-a) > 0$. Число $(-a)$ положительно и $(-a)^2 = a^2$. Поэтому $\sqrt{a^2} = -a$.

Таким образом,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

или по определению модуля действительного числа $\sqrt{a^2} = |a|$, что и утверждалось.

Например, $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$; $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{если } a \geqslant b, \\ b-a, & \text{если } a < b. \end{cases}$

Равенство $\sqrt{a^2} = |a|$ выполняется при любых значениях a. Значит, это равенство является тождеством на множестве действительных чисел.

Подставляя в тождество $\sqrt{a^2} = |a|$ число $a = b^n$ (n — натуральное число), получим тождество

$$\sqrt{b^{2n}} = |b^n|.$$

Если $b \geqslant 0$, то имеем $\sqrt{b^{2n}} = b^n$. Например, $\sqrt{5^4} = 5^2 = 25$; $\sqrt{(-3)^6} = |(-3)^3| = 27$.

Докажем следующие свойства арифметического квадратного корня:

1) *Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей*, т. е.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geqslant 0;\ b \geqslant 0).$$

Доказательство. Нужно установить, что

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab.$$

Так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то по определению арифметического корня $(\sqrt{a})^2 = a$; $(\sqrt{b})^2 = b$. Квадрат произведения равен произведению квадратов. Поэтому

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Так как $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} \geqslant 0$, то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Свойство доказано.

Отсюда следует, что

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

2) *Корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя*, т. е.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a\geqslant 0,\ b>0).$$

Доказательство. Нужно установить, что

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b}.$$

Так как $a\geqslant 0$ и $b>0$, то по определению арифметического корня $(\sqrt{a})^2=a$, $(\sqrt{b})^2=b$. Возводя дробь $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ в квадрат, получим

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}.$$

Так как $\sqrt{a}\geqslant 0$, $\sqrt{b}>0$, то $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 0$. Свойство доказано.

Отсюда следует, что

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a\geqslant 0,\ b>0).$$

3) *Если* $a>b>0$, *то* $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

Доказательство. Допустим, что $\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$. Тогда возводя обе части неравенства в квадрат, получим $a\leqslant b$, что противоречит условию. Значит, $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

Отсюда следует, что

если $a>0$, $b>0$ и $\sqrt{a}>\sqrt{b}$, то $a>b$.

Рассмотрим преобразование квадратных корней.

Вынесение множителя из-под знака корня. Так называется преобразование вида

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b} \quad (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0).$$

В самом деле, $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=|a|\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$.

Замечание. Если $a<0$, $b\geqslant 0$, то

$$\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b},$$

так как $|a|=-a$ при $a<0$.

Внесение множителя под знак корня. Так называется преобразование вида

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b} \quad (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0).$$

Покажем применение свойств и преобразований арифметических квадратных корней при выполнении действий над ними.

Пример 1. Вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{4a^2b^3}$, где $a<0$, $b>0$.

Решение. Имеем

$$\sqrt{4a^2b^3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^3}=2|a|\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{b}=2|a||b|\cdot\sqrt{b}.$$

Так как $a<0$ и $b>0$, то $|a|=-a$, $|b|=b$. Поэтому $\sqrt{4a^2b^3}=-2ab\sqrt{b}$.

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{16a^4b^6c^3}$, где $b<0$, $c>0$.

Решение. Имеем

$$\sqrt{16a^4b^6c^3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{b^6}\cdot\sqrt{c^3}=4|a^2||b^3||c|\cdot\sqrt{c}.$$

Число a^2 всегда неотрицательно; $|a^2|=a^2$. Так как $b<0$ и $c>0$, то $|b^3|=-b^3$, $|c|=c$. Поэтому $\sqrt{16a^4b^6c^3}=-4a^2b^3c\sqrt{c}$.

Пример 3. Внести знаменатель под знак корня в выражении $\frac{\sqrt{x}}{y}$, где $x\geqslant 0$, $y<0$.

Решение. Так как $y<0$, то $\sqrt{y^2}=|y|=-y$. Значит, $y=-\sqrt{y^2}$. Поэтому

$$\frac{\sqrt{x}}{y}=\frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{y^2}}=-\sqrt{\frac{x}{y^2}}.$$

Пример 4. Выполнить действия $\sqrt{343}-\sqrt{252}-\sqrt{7}$.

Решение. Заметим, что $343=49\cdot 7$, $252=36\cdot 7$. Поэтому $\sqrt{343}-\sqrt{252}-\sqrt{7}=7\sqrt{7}-6\sqrt{7}-\sqrt{7}=0$.

Пример 5. Сравнить числа $3\sqrt{5}$ и $4\sqrt{3}$.

Решение. Введем множители 3 и 4 под знаки корня и получим

$$3\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45};\quad 4\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}.$$

Так как $45<48$, то по свойству сравнения корней получаем, что $\sqrt{45}<\sqrt{48}$ или $3\sqrt{5}<4\sqrt{3}$.

Пример 6. Упростить выражение $\sqrt{\frac{x^2}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Решение. Корень $\sqrt{\frac{x^2}{y}}$ имеет смысл только при $y>0$, а корень $\sqrt{\frac{y}{x}}$ — при одинаковых знаках x и y. Поэтому для данного выражения $x>0$ и $y>0$. Имеем $\sqrt{\frac{x^2}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{\frac{x^2}{y}\cdot\frac{y}{x}}=\sqrt{x}$, где $x>0$, $y>0$.

§ 6. Степень с целым показателем

Понятие и свойства степени с натуральным показателем были рассмотрены в § 4. Обобщая понятие степени, введем степени с нулевым и с целым отрицательным показателями.

Определение. *Если* $a \neq 0$, *то* $a^0 = 1$.

Выражение 0^0 не имеет смысла.

Определение. *Если* $a \neq 0$ *и* n *— натуральное число, то*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Выражение 0^{-n} не имеет смысла.

Свойство степени с натуральным показателем

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{если } m > n, \\ 1, & \text{если } m = n, \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{если } m < n \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

можно теперь, используя понятия степени с нулевым и с целым отрицательным показателями, записать в виде

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$$

для любых натуральных показателей m и n.

Справедливы следующие свойства степени с любым целым показателем:

1) $a^p a^q = a^{p+q}$;

2) $(a^p)^q = a^{pq}$;

3) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;

4) $(ab)^p = a^p b^p$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$.

Пример 1. Вычислить $\dfrac{18^{-3} \cdot 3^7}{2^{-5}}$.

Решение. $\dfrac{18^{-3} \cdot 3^7}{2^{-5}} = \dfrac{2^5 \cdot 3^7}{18^3} = \dfrac{2^5 \cdot 3^7}{(2 \cdot 3^2)^3} = \dfrac{2^5 \cdot 3^7}{2^3 \cdot 3^6} = 2^2 \cdot 3 = 12.$

Пример 2. Найти значение выражения $1{,}7^{-3} : 5{,}1^{-3} \cdot 6^{-3}$.

Решение. $1{,}7^{-3} : 5{,}1^{-3} \cdot 6^{-3} = \left(\dfrac{1{,}7 \cdot 6}{5{,}1}\right)^{-3} = \left(\dfrac{6}{3}\right)^{-3} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$.

Пример 3. Записать в виде $a^p b^q$ (p, q — целые) выражение

$$\frac{(ab)^4}{(a^{-2} \cdot b^3)^{-3}} \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0).$$

Решение.

$$\frac{(ab)^4}{(a^{-2} \cdot b^3)^{-3}} = \frac{a^4 b^4}{(a^{-2})^{-3} \cdot (b^3)^{-3}} = \frac{a^4 \cdot b^4}{a^6 \cdot b^{-9}} = a^{-2} b^{13}.$$

§ 7. Арифметический корень n-й степени

Пусть $a \geqslant 0$ — действительное число, $n \geqslant 2$ — натуральное число.

Определение. *Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a* называют неотрицательное число b, если $b^n = a$, и записывают $\sqrt[n]{a} = b$. При $n = 2$ имеем арифметический квадратный корень. Из определения арифметического корня n-й степени следует:

1) выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл только при $a \geqslant 0$;

2) выражение $\sqrt[n]{a}$ всегда неотрицательно, т. е. $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$;

3) равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$ верно при любом $a \geqslant 0$.

Докажем следующие основные правила действий над арифметическими корнями:

1) Основное свойство арифметического корня. *Величина арифметического корня не изменится, если показатель корня умножить на любое натуральное число k и одновременно подкоренное выражение возвести в степень с тем же показателем k*, т. е.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (a \geqslant 0).$$

В самом деле, пусть $\sqrt[n]{a} = b$ $(b \geqslant 0)$. Это означает, что $b^n = a$. Тогда по свойству степени

$$(b^n)^k = b^{nk} = a^k.$$

Отсюда следует, что $b = \sqrt[nk]{a^k}$. Таким образом, $\sqrt[n]{a} = b = \sqrt[nk]{a^k}$, что и утверждалось.

2) *При умножении арифметических корней с одинаковыми показателями подкоренные выражения умножаются, а показатель корня остается прежним*, т. е.

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

В самом деле, по свойству степени имеем

$$(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n\,(\sqrt[n]{b})^n = ab,$$

так как $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $(\sqrt[n]{b})^n = b$ при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Отсюда, согласно определению арифметического корня, следует, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ или $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Утверждение доказано.

В частности, $\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n}\,\sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ (правило вынесения множителя из-под корня).

3) *При делении арифметических корней с одинаковыми показателями подкоренные выражения делятся, а показатель корня остается прежним*, т. е.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0).$$

Это свойство доказывается так же, как и предыдущее свойство. В частности,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b} \quad (a\geqslant 0,\ b>0)$$

(правило освобождения подкоренного выражения от знаменателя).

4) *При возведении арифметического корня в степень с натуральным показателем возводится в эту степень подкоренное выражение, а показатель корня остается прежним, т. е.*

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \quad (a\geqslant 0,\ m\text{—натуральное число}).$$

Это правило является следствием правила умножения корней.

5) *При извлечении корня из корня умножаются показатели корней, а подкоренное выражение остается прежним*, т. е.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \ (a\geqslant 0;\ m,\ n\text{—натуральные числа},\ m\geqslant 2,\ n\geqslant 2).$$

В самом деле, согласно правилу возведения корня в степень, имеем

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})^{mn}}=\sqrt[m]{((\sqrt[n]{a})^n)^m}.$$

Отсюда

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\sqrt[m]{a^m}=a \quad (a\geqslant 0).$$

Следовательно, по определению арифметического корня $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, что и требовалось доказать.

Определение. Корни (или радикалы) называются *подобными*, если у них одинаковы подкоренные выражения и одинаковы показатели корней.

В общем случае сумму или разность двух различных корней упростить нельзя. Упрощения возможны только в случае подобных корней. Например, $(6\sqrt{2}+5\sqrt{3})-(6\sqrt{2}+7\sqrt{3})=6\sqrt{2}+5\sqrt{3}-6\sqrt{2}-7\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$.

Правило сравнения арифметических корней основано на следующем свойстве: *если* $a>b>0$, *то* $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$, *и обратно, если* $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(a>0,\ b>0)$, *то* $a>b$.

Оно вытекает из свойств неравенств (§ 10 гл. VI). Например, $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$. Чтобы доказать это, сначала, применяя основное свойство корня, приведем $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$ к общему показателю 6 (наименьшему общему кратному показателей данных корней): $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$, $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$. Затем используем правило сравнения корней и получим, что $\sqrt[6]{9}>\sqrt[6]{8}$ или $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

Мы всегда будем рассматривать только арифметические корни. Поэтому надо внимательно проверять условие неотрицательности как подкоренного выражения, так и результата, полученного при извлечении корня.

Например, мы не рассматриваем произведения $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}$, так как $\sqrt[3]{-3}$ не является арифметическим корнем. При умножении $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$ получаем

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}=\sqrt[6]{72}.$$

В случае арифметического квадратного корня справедливо тождество $\sqrt{a^2}=|a|$ для любого действительного числа. Аналогично получим, что

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a|, & \text{если } n\text{—четное число, } n\geqslant 2;\\ a, & \text{если } a\geqslant 0 \text{ и } n\text{—нечетное число, } n\geqslant 3.\end{cases}$$

Например,

$$\sqrt[3]{x^3}=x \quad (x\geqslant 0), \quad \sqrt[4]{x^4}=|x|, \quad \sqrt[6]{x^6}=|x|;$$

в преобразованиях

$$\sqrt[6]{x^3}=\sqrt{\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt{x} \quad (x\geqslant 0), \quad \sqrt[4]{x^2}=\sqrt{\sqrt{x^2}}=\sqrt{|x|},$$
$$\sqrt[15]{x^3}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt[5]{x} \quad (x\geqslant 0) \text{ и т. п.}$$

Рассмотрим примеры на применение полученных свойств.

Пример 1. Ввести множитель под знак корня в выражении $a\sqrt[3]{1+\frac{1}{a^3}}$, где $a>0$.

Решение. Так как $a=\sqrt[3]{a^3}$ $(a>0)$, то

$$a\sqrt[3]{1+\frac{1}{a^3}}=\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{a^3}}=\sqrt[3]{a^3\left(1+\frac{1}{a^3}\right)}=\sqrt[3]{a^3+1}.$$

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt[6]{1+\frac{1}{a^6}}$, где $a<0$.

Решение. Мы знаем, что $\sqrt[6]{a^6}=|a|=-a$, так как $a<0$. Поэтому

$$\sqrt[6]{1+\frac{1}{a^6}}=\sqrt[6]{\frac{a^6+1}{a^6}}=\frac{\sqrt[6]{a^6+1}}{\sqrt[6]{a^6}}=-\frac{\sqrt[6]{a^6+1}}{a}.$$

Пример 3. Вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt[3]{x^8y^{10}z^5}$, где $y>0$, $z>0$.

Решение. Имеем

$$\sqrt[3]{x^8y^{10}z^5}=\sqrt[3]{x^6x^2y^9yz^3z^2}=\sqrt[3]{x^6}\sqrt[3]{y^9}\sqrt[3]{z^3}\sqrt[3]{x^2yz^2}=x^2y^3z\sqrt[3]{x^2yz^2},$$

так как $\sqrt[3]{x^6}=x^2$ для любого x, $\sqrt[3]{y^9}=y^3$ и $\sqrt[3]{z^3}=z$ при $y>0$, $z>0$.

Если изменить условие и считать $y<0$, $z>0$, то $\sqrt[3]{x^8y^{10}z^5}=$ $=\sqrt[3]{x^8}\sqrt[3]{y^{10}}\sqrt[3]{z^5}$. Известно, что $\sqrt[3]{x^8}=x^2\sqrt[3]{x^2}$; при $y<0$ корень

$\sqrt[3]{y^{10}}=\sqrt[3]{(-y)^9(-y)}=(-y)^3\sqrt[3]{-y}=-y^3\sqrt[3]{-y}$; при $z>0$ корень $\sqrt[3]{z^5}=z\sqrt[3]{z^2}$.

Арифметический корень $\sqrt[3]{y^{10}}$ имеет смысл при любом y, арифметический корень $\sqrt[3]{z^5}$ — только при $z\geqslant 0$. Получаем, что $\sqrt[3]{x^8y^{10}z^5}=-x^2y^3z\sqrt[3]{-x^2yz^2}$, если $y<0$, $z>0$.

Пример 4. Доказать, что $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\sqrt[4]{-b}$, если $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$.

Решение. Если $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$, то $ab\geqslant 0$. Поэтому корень $\sqrt[4]{ab}$ имеет смысл. Так как $ab=(-a)(-b)$ и оба множителя неотрицательны при $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$, то по правилу умножения корней

$$\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\sqrt[4]{-b}\quad (a\leqslant 0,\quad b\leqslant 0),$$

что и требовалось доказать.

Пример 5. Выполнить действия $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$.

Решение. Преобразуем: $2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^4}$. Поэтому $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}=\sqrt[6]{2^4}$. Далее имеем $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2\sqrt[6]{2^4}}=\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^{10}}}=\sqrt[18]{2^{10}}=\sqrt[9]{2^5}=\sqrt[9]{32}$ (применили основное свойство корня и правило извлечения корня из корня).

§ 8. Степень с рациональным показателем

Понятие и свойства степени с любым целым показателем были рассмотрены в § 6. Введем теперь степень с дробным рациональным показателем.

Определение. Если $a>0$ и x — произвольное рациональное число, представленное дробью $\frac{p}{q}$, где p — целое, а $q\geqslant 2$ — натуральное число, то

$$a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p};$$

если $a=0$ и $x>0$, то $a^x=0$.

Например, $a^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2}$ при любом $a\geqslant 0$; $b^{-\frac{3}{4}}=b^{\frac{-3}{4}}=\sqrt[4]{b^{-3}}$ или $b^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\frac{1}{b^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{b^3}}=\frac{1}{b^{\frac{3}{4}}}$ при $b>0$.

Замечание 1. Если $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то для любой дроби вида $\frac{pn}{qn}=\frac{p}{q}$ (n — натуральное число), имеем

$$a^{\frac{pn}{qn}}=\sqrt[qn]{a^{pn}}=\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}$$

(использовано основное свойство арифметического корня).

Замечание 2. Если $a>0$ и x—целое число, представленное дробью вида $\frac{p}{q}$, где p—целое, а $q\geqslant 2$—натуральное число, то равенство $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ также верно, но не по определению степени с дробным показателем, а по определению арифметического корня. В самом деле, если $\frac{p}{q}=x$, то $\sqrt[q]{a^p}=a^x$ $(a>0)$, так как $(a^x)^q=a^{qx}=a^p$ и $a^x>0$. Значит,

$$a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

Из определения степени с дробным показателем следует, что $a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$, где $a>0$. В самом деле,

$$a^{-\frac{p}{q}}=a^{\frac{-p}{q}}=\sqrt[q]{a^{-p}}=\sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} \quad \text{или} \quad a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Так как при $a\neq 0$ $a^0=1$ и $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ (n—натуральное число), то для любого рационального числа x имеем $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$, если $a>0$.

Свойства степени с целым показателем распространяются и на степень с любым рациональным показателем и положительным основанием.

Рассмотрим примеры на применение свойств.

Пример 1. Вычислить $8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}+9^{\frac{1}{2}}$.

Решение. $8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}+9^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[4]{16}+\sqrt{9}=\sqrt[3]{64}-$ $-\sqrt[4]{16}+\sqrt{9}=4-2+3=5.$

Пример 2. Найти значение выражения $(0{,}04)^{-1{,}5}\times$ $\times(0{,}125)^{-\frac{4}{3}}-\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Решение. $(0{,}04)^{-1{,}5}\cdot(0{,}125)^{-\frac{4}{3}}-\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}\times$ $\times\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}-\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2^3}\right)^{-\frac{4}{3}}-\left(\frac{1}{11^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=(5^{-2})^{-\frac{3}{2}}\times$ $\times(2^{-3})^{-\frac{4}{3}}-(11^{-2})^{-\frac{1}{2}}=5^3\cdot 2^4-11=(5\cdot 2)^3\cdot 2-11=2000-11=1989.$

Пример 3. Выполнить действия

$$\frac{2\cdot 4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+(\sqrt{3})^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}.$$

Решение. 1) $2\cdot 4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}=$

$$=2\cdot\frac{1}{4^2}+\left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right)^{3}\cdot 9^3=\frac{1}{8}+\frac{1}{9^3}\cdot 9^3=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}.$$

2) $125^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+(\sqrt{3})^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\sqrt[3]{125}}\cdot 5^2+1\cdot 2^2=$

$$=\frac{1}{5}\cdot 5^2+1\cdot 2^2=5+4=9.$$

3) $\frac{9}{8}:9=\frac{1}{8}$. Дробь равна $\frac{1}{8}$.

Пример 4. Упростить выражение

$$\sqrt[3]{x^{-\frac{1}{2}}y^{-2}}\left(x^{-\frac{5}{2}}y^{-4}\right)^{-\frac{1}{3}}\sqrt{x^{-2}y^{-\frac{1}{3}}}.$$

Решение. Имеем

$$x^{-\frac{1}{2}}y^{-2}=\frac{1}{y^2\sqrt{x}},\quad \text{если } x>0,\ y\neq 0;$$

$$x^{-\frac{5}{2}}y^{-4}=\frac{1}{y^4\sqrt{x^5}}=\frac{1}{x^2y^4\sqrt{x}},\quad \text{если } x>0,\ y\neq 0;$$

$$\sqrt{x^{-2}y^{-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\sqrt[3]{y}}}=\frac{1}{|x|\sqrt[6]{y}},\quad \text{если } x\neq 0,\ y>0.$$

Данное выражение имеет смысл при $x>0$, $y>0$. Получим

$$\sqrt[3]{x^{-\frac{1}{2}}y^{-2}}\left(x^{-\frac{5}{2}}y^{-4}\right)^{-\frac{1}{3}}\sqrt{x^{-2}y^{-\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{1}{y^2\sqrt{x}}}\sqrt[3]{x^2y^4\sqrt{x}}\times$$

$$\times\frac{1}{x\sqrt[6]{y}}=\sqrt[3]{\frac{x^2y^4\sqrt{x}}{y^2\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[6]{y}}=\sqrt[3]{x^2y^2}\cdot\frac{1}{x\sqrt[6]{y}}=$$

$$=\frac{1}{x}\sqrt[6]{\frac{x^4y^4}{y}}=\frac{1}{x}\sqrt[6]{x^4y^3},$$

если $x>0$, $y>0$.

§ 9. Понятие о степени с иррациональным показателем. Свойства степени с действительным показателем

Пусть a — положительное действительное число, x — положительное иррациональное число. Как всякое иррациональное число, x есть бесконечная непериодическая десятичная дробь: $x=c,b_1b_2\ldots b_n\ldots$ Рассмотрим последовательности десятичных приближений для иррационального числа x по недостатку c,b_1; c,b_1b_2; …; $c,b_1b_2\ldots b_n$; … и по избытку c,b_1+1; $c,b_1(b_2+1)$;… …; $c,b_1b_2\ldots(b_n+1)$; …

Образуем две новые последовательности:

$$a^{c,b_1};\quad a^{c,b_1b_2};\ \ldots;\qquad a^{c,b_1b_2\ldots b_n};\ \ldots$$
$$a^{c,b_1+1};\ a^{c,b_1(b_2+1)};\ \ldots;\ a^{c,b_1b_2\ldots(b_n+1)};\ \ldots$$

В высшей математике доказано, что существует и притом единственное число, для которого эти последовательности являются последовательностями десятичных приближений. Это число обозначается a^x и называется *степенью числа* $a>0$ *с иррациональным показателем* x.

Например, степень $2^{\sqrt{2}}$ есть число, для которого последовательности $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; $2^{1,4142}$; ... и $2^{1,5}$; $2^{1,42}$; $2^{1,415}$; $2^{1,4143}$; ... являются последовательностями десятичных приближений соответственно по недостатку и по избытку ($\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$).

По определению

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}\quad (a>0),$$

где x — положительное иррациональное число.

Теорема. *Для любых действительных* x *и* y *и допустимых* a *и* b *справедливы равенства*:

1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$;

2) $(a^x)^y=a^{xy}$;

3) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;

4) $(ab)^x=a^x\cdot b^x$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$.

Строгое определение степени с иррациональным показателем и доказательство всех этих свойств для иррациональных x и y приводятся в курсе высшей математики. Отметим, что $a^x>0$ при $a>0$ для любых действительных значений x. Справедливость свойств 1—5 для рациональных x и y была указана в § 8.

§ 10. Решение задач

Пример 1. Доказать, что 16^5+2^{15} делится на 33.

Решение. $16^5+2^{15}=(2^4)^5+2^{15}=2^{20}+2^{15}=2^{15}(2^5+1)=$ $=2^{15}\cdot 33$.

Пример 2. Доказать иррациональность чисел $\sqrt{3}$ и $\log_2 3$.

Решение. 1) Допустим, что $\sqrt{3}$ — рациональное число:

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q},$$

где p и q — целые числа, причем $q\neq 0$. Дробь $\frac{p}{q}$ будем считать несократимой. Согласно определению корня

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=3\quad\text{или}\quad p^2=3q^2.$$

Отсюда следует, что p делится на 3: $p=3p_1$, где p_1—целое число. Тогда $(3p_1)^2=3q^2$ или $q^2=3p_1^2$. Значит, q также делится на 3: $q=3q_1$, где q_1—целое число. Следовательно, дробь $\frac{p}{q}=\frac{3p_1}{3q_1}$ сократима, что противоречит условию. Заключаем, что $\sqrt{3}$—иррациональное число.

Замечание. Мы использовали следующее утверждение: если квадрат целого числа делится на 3, то и само число делится на 3. Предоставим читателю доказать это утверждение.

2) Пусть $\log_2 3$—рациональное число $\frac{p}{q}$, где p и q—целые, $q\neq 0$. Тогда $\log_2 3=\frac{p}{q}$. По определению логарифма $2^{\frac{p}{q}}=3$ или $\left(2^{\frac{p}{q}}\right)^q=3^q$. Получим: $2^p=3^q$. Но это равенство невозможно, так как 2^p—четное число, а 3^q—нечетное. Значит, наше предположение неверно и $\log_2 3$ является иррациональным числом.

Пример 3. Упростить выражение $3\sqrt{\frac{2}{3}}-2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}+\sqrt{150}$.

Решение. $3\sqrt{\frac{2}{3}}-2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}+\sqrt{150}=\sqrt{3^2\cdot\frac{2}{3}}-\sqrt{2^2\cdot\frac{3}{2}}+\sqrt{6}+\sqrt{25\cdot 6}=\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{6}+5\sqrt{6}=6\sqrt{6}$.

Пример 4. При каких значениях x верны равенства: а) $x+|x|=0$; б) $x+|x|=2x$; в) $\frac{x}{|x|}=-1$; г) $x\sqrt{3}=-\sqrt{3x^2}$; д) $3x\sqrt{2}=\sqrt{18x^2}$?

Решение. а) $x+|x|=0$ или $|x|=-x$. Равенство верно для любого $x\leqslant 0$.

б) $x+|x|=2x$ или $|x|=x$. Равенство верно для любого $x\geqslant 0$.

в) $\frac{x}{|x|}=-1$ или $|x|=-x$, где $x\neq 0$. Равенство верно при $x<0$.

г) $x\sqrt{3}=-\sqrt{3x^2}$ или $x\sqrt{3}=-|x|\sqrt{3}$, $x=-|x|$. Равенство верно при $x\leqslant 0$.

д) $3x\sqrt{2}=\sqrt{18x^2}$ или $3x\sqrt{2}=3|x|\sqrt{2}$, $x=|x|$. Равенство верно при $x\geqslant 0$.

Пример 5. Упростить выражение $\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}$.

Решение. Заметим, что $x^2-2x+1=(x-1)^2$, $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Поэтому

$$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+1)^2}=$$
$$=|x-1|-|x+1|.$$

По определению модуля

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{если } (x-1)\geqslant 0,\\ -(x-1), & \text{если } (x-1)<0\end{cases}$$

$$\text{или } |x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{если } x\geqslant 1,\\ -(x-1), & \text{если } x<1;\end{cases}$$

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, & \text{если } (x+1)\geqslant 0,\\ -(x+1), & \text{если } (x+1)<0\end{cases}$$

$$\text{или } |x+1|=\begin{cases} x+1, & \text{если } x\geqslant -1;\\ -(x+1), & \text{если } x<-1.\end{cases}$$

Точки $x=-1$ и $x=1$ разбивают числовую ось на три промежутка: $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$ (рис. 9).

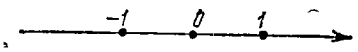


Рис. 9.

Если $x\leqslant -1$, то $|x-1|-|x+1|=-(x-1)-(-(x+1))=$ $=-x+1+x+1=2$.

Если $-1<x<1$, то $|x-1|-|x+1|=-(x-1)-(x+1)=$ $=-2x$.

Если $x\geqslant 1$, то $|x-1|-|x+1|=(x-1)-(x+1)=-2$.

Таким образом,

$$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}=\begin{cases} 2, & \text{если } x\leqslant -1,\\ -2x, & \text{если } -1<x<1,\\ -2, & \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Пример 6. При каких значениях x верны неравенства: а) $|-x|\leqslant x$; б) $x|x|\geqslant x^2$; в) $\sqrt{x^2}\leqslant -x$; г) $x\sqrt{2}>\sqrt{2x^2}$?

Решение. а) $|-x|=|x|$. Неравенство $|x|\leqslant x$ верно при $x\geqslant 0$.

б) Неравенство не выполняется при $x<0$. При $x\geqslant 0$ $|x|=x$, и нестрогое неравенство $x^2\geqslant x^2$ верно.

в) $\sqrt{x^2}=|x|$; $|x|\leqslant -x$ при $x\leqslant 0$.

г) $\sqrt{2x^2}=|x|\sqrt{2}$; $x\sqrt{2}>|x|\sqrt{2}$ или $x>|x|$ неверно при любом x.

Пример 7. Доказать, что верно неравенство $3\sqrt{2}+2\sqrt{7}>$ $>3\sqrt{3}+4$.

Решение. Внесем множители под знак корня и запишем исходное неравенство так: $\sqrt{3^2\cdot 2}+\sqrt{2^2\cdot 7}>\sqrt{3^2\cdot 3}+\sqrt{16}$ или $\sqrt{18}+\sqrt{28}>\sqrt{27}+\sqrt{16}$. Это неравенство верное, оно получается сложением двух верных неравенств: $\sqrt{18}>\sqrt{16}$, $\sqrt{28}>\sqrt{27}$.

Пример 8. Расположить в порядке возрастания числа: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$.

Решение. Заметим, что $\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$. Сравним сначала $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$. Приведем их к общему показателю 6: $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$, $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, следовательно, $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

Сравним теперь $\sqrt{2}$ и $\sqrt[5]{5}$: $\sqrt{2}=\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{32}$; $\sqrt[5]{5}=\sqrt[10]{5^2}=\sqrt[10]{25}$. Следовательно, $\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$.

Итак, $\sqrt[5]{5}<\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$.

Пример 9. Найти значение выражения $\left(\frac{a^{\frac{5}{12}}a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$ при $a=125$.

Решение. Сначала упростим данное выражение, применяя свойство степеней с дробным показателем:

$$\left(\frac{a^{\frac{5}{12}}a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(a^{\frac{5}{12}}a^{-\frac{3}{8}}a^{-\frac{7}{24}}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.$$

При $a=125$ получим $\sqrt[3]{125}=5$.

Упражнения

Раздел I

1. Доказать, что $200^{300}>300^{200}$.

2. Доказать, что значение выражения $333^{555}+555^{333}$ кратно 37.

3. Доказать иррациональность чисел $\sqrt[3]{2}$ и $\lg 2$.

4. Упростить выражение $(\sqrt{14}-2\sqrt{35})\cdot\frac{1}{7}\sqrt{7}+20$.

5. Вычислить с точностью до 0,01: а) $\sqrt{2}+\frac{5}{8}$; б) $\frac{3}{4}-\sqrt{5}$.

6. Извлечь квадратный корень с точностью до 0,01: а) $\sqrt{32{,}5}$; б) $\sqrt{0{,}954}$.

7. При каких значениях x справедливы равенства:

а) $|-x|=-x$; б) $x-|x|=0$; в) $x|x|=x^2$; г) $2x\sqrt{3}=-\sqrt{12x^2}$?

8. Упростить: $\frac{1}{2}ab\sqrt{8a^3b}+\frac{1}{3}ab\sqrt{18ab^3}-a^2\sqrt{\frac{2b}{a}}-b^2\sqrt{\frac{2a}{b}}$, где $a>0$, $b>0$.

9. При каких значениях x справедливы неравенства:

а) $|x|\leqslant -x$; б) $|x|\leqslant|-x|$; в) $\frac{x}{|x|}\leqslant -1$; г) $x\sqrt{3}\leqslant-\sqrt{3x^2}$?

10. Сравнить выражения $\frac{1}{3}\sqrt{63}$ и $\frac{1}{4}\sqrt{80}$.

11. Доказать неравенство $\sqrt{27}+\sqrt{6}+1>\sqrt{48}$.

12. Доказать, что

$$x+y+\sqrt{(x-y)^2}=\begin{cases}2x, & \text{если } x\geqslant y,\\ 2y, & \text{если } x\leqslant y.\end{cases}$$

13. Внести множитель под знак корня:

$$(1-x)\sqrt{\frac{x}{x-1}},\ \text{если } x>1.$$

14. Упростить выражение путем вынесения множителя из-под знака корня:

$$(2-a)\sqrt{\frac{1}{a^2-4a+4}},\ \text{если } a<2.$$

15. Найти значение выражения

$$\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}} \text{ при } x=0{,}001,\ y=25.$$

Раздел II

16. Доказать иррациональность чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$.

17. Найти $\sqrt{3}$ с точностью до $\frac{1}{5}$; до $\frac{1}{10}$; до $\frac{1}{100}$.

18. Найти $\sqrt{153{,}213}$, $\sqrt{0{,}487}$ с точностью до 0,01.

19. Вычислить с точностью до $\frac{1}{100}$:

а) $\sqrt{7}+\frac{1}{7}$; б) $\frac{5}{9}-\sqrt{5}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; г) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+1}$.

20. Может ли сумма двух положительных иррациональных чисел быть числом рациональным?

21. Может ли произведение двух не равных положительных иррациональных чисел быть числом рациональным?

22. (устно). Найти $[48{,}3]$, $[0{,}29]$, $[-5{,}7]$.

23. (устно). Найти $\{-2\}$, $\{3{,}9\}$, $\{-7,\ 15\}$.

24. (устно). При каких значениях x справедливы равенства:

а) $|x-3|=0$; б) $|x-3|=1$?

25. (устно). При каких значениях x справедливы равенства:

а) $x^2\cdot|x|=x^3$; б) $|x^2|\cdot x=x^3$; в) $x^3=|x|^3$; г) $x^3=|x^3|$?

26. Найти длину отрезка AB, если:

а) $A(0;\ -2)$, $B(-3;\ 4)$; б) $A(-3;\ -1)$, $B(-8;\ 3)$.

27. Вычислить: $\frac{63^4\cdot 35^3}{21^7\cdot 5^5}$.

28. Вычислить: $(-2{,}2)^5\cdot\left(2\frac{3}{11}\right)^4$.

29. Расположить в порядке возрастания числа $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$, $-\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $-0{,}4^2$.

30. Сравнить числа:

а) 5^{100} и 2^{200}; б) 10^{20} и 40^{10}.

31. Вычислить: $\frac{(3\cdot 2^{20}+7\cdot 2^{19})\cdot 52}{(13\cdot 8^4)^2}$.

32. Упростить: $\frac{5\cdot 2^{k-2}+10\cdot 2^{k-1}}{10^{k+2}}$.

33. Вычислить:

а) $\frac{(3\cdot 4)^3}{(2\cdot 3\cdot 4)^2}$; б) $24\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(4\frac{1}{2}\right)^2$.

34. Найти арифметическое значение корня:

а) $\sqrt{(-3)^2}$; б) $\sqrt{(-5)^6}$; в) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$.

35. (устно). При каких значениях x справедливы равенства:

а) $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$; б) $\sqrt{(x-4)^3}=4-x$; в) $\sqrt{(5x-8)^2}=|5x-8|$.

36. Доказать, что $x-y-\sqrt{(x-y)^2}=\begin{cases}0, & \text{если } x\geqslant y,\\ 2(x-y), & \text{если } x<y.\end{cases}$

37. Вынести множитель из-под знака корня в выражении

$$\sqrt{\frac{a^4b^2c^5}{25}},\ \text{если } a<0,\ b<0,\ c>0.$$

38. Внести множитель под знак корня в выражении

$$3x^3y\sqrt{xy^2},\ \text{если } x>0,\ y<0.$$

39. Выполнить действия:

$$\sqrt{12}-2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+2\sqrt{75}+3\sqrt{108}.$$

40. Выполнить действия:

$$3\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{5}{6}\sqrt{27}-0{,}1\sqrt{75}+2\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

41. Сравнить числа:

а) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{50}$; б) $3\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{\frac{1}{8}}$.

42. Приняв $\sqrt{6}\approx 2{,}45$, вычислить $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

43. Вынести множитель из-под знака корня, считая все множители неотрицательными:

а) $\sqrt[3]{a^6b^4}$; б) $\sqrt[4]{a^{10}b^7}$; в) $\sqrt[3]{27x^8y^3}$; г) $\sqrt[3]{\frac{0{,}054a^8}{b^{13}c^3}}$; д) $\sqrt[5]{\frac{2^7\cdot a^9b^{21}}{3^6c^{12}}}$;

е) $\sqrt[2n]{5^{2n+4}a^{6n+3}}$.

44. Сравнить значения выражений $\sqrt[5]{6}$ и $\sqrt[11]{35}$.

45. Выполнить действия:

а) $\left(0{,}2\sqrt[4]{x^3y^2}\right)^3$; б) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{m^3}}$; г) $\sqrt[6]{a^2\sqrt{a}}$.

46. Вычислить:

$$\frac{2\cdot 4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}+(\sqrt{3})^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}.$$

47. Упростить выражение

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{6}}}:\left(\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}\cdot\frac{x^{-\frac{5}{6}}\cdot z^{-\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}}\right).$$

48. Упростить:

$$\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{5}{6}}}:\sqrt[4]{x^{-3}y^{-3}}\right)^{\frac{2}{7}}.$$

49. Выполнить действия:

$$ab\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}-ab\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}+\frac{a}{b}\sqrt[3]{ab^4}-\frac{b}{a}\sqrt[3]{a^4b}.$$

50. Освободить дробь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

51. Вычислить:

а) $1024^{-0,6}$; б) $9^{-0,5}-8^{-\frac{4}{3}}-8^{-\frac{4}{3}}+(0,25)^{-\frac{3}{2}}$.

52. Выполнить действия:

$$\left(\left(\frac{2}{x^3y^{-1}}\right)^2\cdot\left(x^2y^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{y^3}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)^2.$$

53. Упростить:

$$\sqrt{\frac{3a^{-\frac{7}{2}}b^8}{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt[4]{4a^{-10}b^6\cdot\frac{1}{\left(a^{-\frac{1}{2}}b\right)^3}}}.$$

54. Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}}\right)^{-4}.$$

55. Доказать, что $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$.

56. Упростить выражение и записать ответ, используя степень с дробными показателями:

$$\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}.$$

Глава V. ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Числовые и алгебраические выражения

Числовым выражением называют выражение, составленное из чисел и знаков действий над ними. Например, $48:12$, $\sqrt{5^2-3^2}$, $3\cdot(10^2+1)$. Выражением иногда называют и отдельное число.

Если в числовом выражении можно выполнить все указанные в нем действия, то полученное в результате число называют *числовым значением* данного числового выражения, а о числовом выражении говорят, что *оно имеет смысл*. В приведенных примерах первое и второе числовые выражения имеют числовое значение 4, а третье — 303.

Числовое выражение не имеет числового значения, если не все указанные в нем действия выполнимы; о таком числовом

выражении говорят, что *оно не имеет* (лишено) *смысла*. Например, числовые выражения $\frac{5}{6-3\cdot 2}$, $\sqrt{9-25}$, $(4-4)^0$ лишены смысла. Вместо числовых выражений часто удобнее рассматривать выражения, в которых числа обозначаются буквами.

Алгебраическим выражением называется выражение, составленное из чисел (обозначенных буквами или цифрами) при помощи алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения арифметического корня)*).

Алгебраическое выражение, содержащее величины x, y, ..., z, сокращенно записывается в виде $A(x, y, \ldots, z)$. Заранее должно быть указано, на каком множестве оно рассматривается, т. е. какие значения могут принимать величины x, y, ..., z — действительные или только рациональные, или только целые и т. п. *Числовое значение алгебраического выражения* — это число, полученное в результате вычислений после замены букв числами.

Значения величин x, y, ..., z, при которых выполнимы все действия, указанные в выражении $A(x, y, \ldots, z)$, называются *допустимыми значениями*. Они образуют *область определения*, или *область допустимых значений* (сокращенно ОДЗ), выражения A. Иногда в связи с конкретным смыслом A на допустимые значения налагаются дополнительные условия.

В дальнейшем алгебраические выражения будем рассматривать на множестве действительных чисел, если не сделано специальных оговорок.

Примеры алгебраических выражений:

$$a+b;\quad \frac{x^3-y^2}{z};\quad \sqrt{2xy}+3x^2y-1.$$

При совместном рассмотрении нескольких алгебраических выражений нужно брать общую часть их областей определения. Например, рассматривая совместно выражения

$$A=\frac{x}{x+1}\quad \text{и}\quad B=\frac{y}{x(y+2)},$$

считают, что $x\neq -1$, $x\neq 0$, $y\neq -2$.

Замечание. Алгебраическое выражение — частный случай математического выражения. Примеры математических выражений:

$$\frac{x^4+y^2}{z+1};\quad \sqrt[4]{x^2y^2+1};\quad 2+5^x;\quad \frac{1}{2}\sin x;\quad 1+\lg x;$$

из них первые два алгебраические.

Два алгебраических выражения A и B, соединенные знаком равенства $(=)$, образуют равенство: $A=B$. При любом конкретном выборе значений величин (из общей части областей оп-

*) Предполагается, что указанные действия применяются конечное число раз.

ределения выражений A и B) равенство $A = B$ обращается в числовое равенство. Полученное числовое равенство может быть справедливым (верным) или несправедливым (ложным). Например, неравенство $x^2 + 1 = -x^4$ является несправедливым для любого действительного числа x: $x^2 + 1 \geqslant 1$, а $(-x^4) \leqslant 0$.

Определение. Равенство, верное для всех допустимых значений, входящих в него величин, называется *тождеством*.

Тождествами называются также и все верные числовые равенства.

Для обозначения тождественности двух выражений применяется также знак $\equiv$: $A(x, y, \ldots, z) \equiv B(x, y, \ldots, z)$.

Простейшими тождествами являются равенства, выражающие основные свойства арифметических действий: $a + b = b + a$; $(a+b)+c \equiv a+(b+c)$, $ab \equiv ba$, $(ab)c \equiv a(bc)$, $(a+b)c \equiv ac+bc$.

Определение. Равенство, верное не для всех допустимых значений входящих в него величин, называется *уравнением*.

Таким образом, равенства бывают двух видов: тождества и уравнения.

Примеры. 1) Равенство $2(x+1) = 2x+2$ есть тождество, так как оно верно при любых значениях x.

2) Равенство $2(x+1) = 3x+1$ есть уравнение, так как оно верно только при $x = 1$ и неверно при остальных значениях x.

3) Равенство $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ есть тождество, справедливое при любых $x \neq 1$ (т. е. при всех допустимых значениях x).

4) Равенство $\sqrt{x^2} = x$ справедливо при $x \geqslant 0$. На множестве действительных чисел это равенство является уравнением (или тождеством на множестве неотрицательных чисел).

Замечание. Понятия равенства, тождества и уравнения вводятся не только для алгебраических, но и для любых математических выражений.

Тождества обладают следующими основными свойствами:

1) *если* $A \equiv B$ *и* $B \equiv C$, *то* $A \equiv C$;

2) *если* $A \equiv B$, *то* $A + C \equiv B + C$;

3) *если* $A \equiv B$, *то* $A \cdot C \equiv B \cdot C$,

где выражения A, B и C рассматриваются на одной и той же области допустимых значений (ОДЗ).

Переход от алгебраического выражения A к тождественному с ним алгебраическому выражению B называется *тождественным преобразованием*.

Алгебраические выражения подразделяются на рациональные и иррациональные.

Алгебраическое выражение называется *рациональным* относительно какой-нибудь величины, входящей в это выражение, если над этой величиной производятся только действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с целым показателем.

Алгебраическое выражение называется *иррациональным* относительно какой-нибудь величины, если оно содержит эту величину под знаком корня.

Например, выражения $2x^3-x^2+3$, $\frac{x^4-y}{x^2+y^2+1}$ рациональные, а выражения $\sqrt{x^2+1}$, $y^2\sqrt[3]{x^4+1}+y\sqrt[3]{x^2}$ иррациональные относительно x, и последнее из них рациональное относительно y.

§ 2. Отношения чисел и однородных величин. Проценты

При сравнении двух чисел иногда нужно узнать, во сколько раз одно число больше (меньше) другого или какую часть одно число составляет от другого. Например, 15 составляет $\frac{1}{3}$ часть от 45, или 45 больше 15 в 3 раза. В этом случае часто говорят иначе: «отношение 15 к 45 равно $\frac{1}{3}$», «отношение 45 к 15 равно 3».

Вообще, *отношением числа a к числу b* называется частное чисел a и b.

Например, отношение 12 к 10 равно 1,2, так как $12:10=1{,}2$; отношение 3 к 7 равно $\frac{3}{7}$, так как $3:7=\frac{3}{7}$.

Отношением называют не только результат деления одного числа на другое, но и само выражение. Например, отношения $12:10$; $3:7$. Числа, входящие в отношение, называют *членами отношения*.

В математике, физике и других науках часто используют отношения однородных величин. Отношением величины a к величине e (того же рода) называется число, которое получится при измерении величины a, если за единицу измерения принять величину e. Отношение однородных величин равно отношению чисел, получающихся при измерении этих величин одной и той же единицей; оно не зависит от выбора единицы измерения.

Например, масштаб карты $1:2\,000\,000$. Это отношение означает, что на карте расстояние в 20 км изображается отрезком длиной 1 см.

Можно рассматривать иногда отношения разнородных величин, например отношение пути ко времени, отношение массы к объему и т. д. Такие отношения представляют собой новую величину: скорость, плотность и т. д. Отношение разнородных величин зависит от выбора единиц измерения.

Например, найдем скорость движения поезда, если поезд прошел 360 км за 3 ч. Отношение пути ко времени дает скорость: $360:3=120$ (км/ч). Если выразить данные в других единицах, например 360 км $=360\,000$ м и 3 ч $=10\,800$ с, то получим другое отношение:

$$360\,000:10\,800=3\tfrac{1}{3}\ (\text{м/с}).$$

Отношение двух чисел часто выражают в сотых долях. В этом случае сотую часть числа называют *процентом*.

Например, отношение $4:5=0{,}8$; 0,8 равно 80 сотым. Данное отношение составляет 80 процентов. Если слово «процент» непосредственно идет после числа, то вместо него ставят знак %. Отсюда $4:5=0{,}8$ или 80%. Говорят, что число 4 составляет 80% от числа 5.

Чтобы выразить отношение двух чисел в процентах, надо значение этого отношения умножить на 100.

Пусть отношение числа a к числу b равно r %. Тогда

$$r=\frac{a}{b}\cdot 100.$$

Рассмотрим три основные задачи на проценты.

Задача 1. Нахождение процентов отношения чисел.

Из группы в 25 человек на занятиях присутствовало 22 человека. Сколько процентов учащихся группы присутствовало на занятиях?

Решение. Так как $a=22$, $b=25$, то $r=\frac{22}{25}\cdot 100=88(\%)$.

Задача 2. Нахождение процентов данного числа.

При перегонке нефти получается 30 % керосина. Сколько керосина получается при перегонке 360 т нефти?

Решение. Используем формулу $r=\frac{a}{b}\cdot 100$. Так как $r=30$, $b=360$, то $30=\frac{a}{360}\cdot 100$, отсюда $a=108$ (т).

Задача 3. Нахождение числа по его процентам.

За один час машина прошла 48 км, что составляет 12% всего пути. Каков весь путь?

Решение. Используем формулу $r=\frac{a}{b}\cdot 100$. Так как $r=12$, $a=48$, то $12=\frac{48}{b}\cdot 100$, отсюда $b=400$ (км).

Рассмотрим решение более сложных задач.

Задача 4. Турист прошел весь маршрут за три дня. В первый день он прошел 30% всего пути, во второй — 60% остатка, после чего ему осталось пройти на 1 км меньше, чем он прошел в первый день. Какова длина всего маршрута?

Решение. Пусть длина всего маршрута x (км). Тогда в первый день пути турист прошел $0{,}3x$ (км) (30% от x составляют $0{,}3x$), и после первого дня остаток пути составил $0{,}7x$ (км) ($x-0{,}3x=0{,}7x$). Во второй день турист прошел $0{,}42x$ (км) (60% от $0{,}7x$ составляют $0{,}6\cdot 0{,}7x=0{,}42x$), и ему осталось пройти в третий день $0{,}28x$ (км) ($0{,}7x-0{,}42x=0{,}28x$). По условию задачи турист в третий день прошел на 1 км меньше, чем он прошел в первый день. Значит,

$$0{,}3x-0{,}28x=1.$$

Решая уравнение, получим $0{,}02x=1$, откуда $x=50$ (км).

Задача 5. Цена товара повысилась на 25%. На сколько процентов надо снизить новую цену товара, чтобы получить первоначальную цену?

Решение. Пусть a — первоначальная цена товара. После повышения цены товар стал стоить $a+0{,}25a=1{,}25a$. Найдем отношение первоначальной цены товара к его новой цене и выразим это отношение в процентах:

$$\frac{a}{1{,}25a}\cdot 100=80\,(\%).$$

Значит, новую цену товара надо снизить на 20% (100 % — —80 % = 20 %).

Задача 6. Свежие грибы содержат по весу 90 % воды, а сухие содержат 12 % воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих грибов?

Решение. По условию свежие грибы содержат 90 % воды. Поэтому 22 кг свежих грибов без воды имеют вес 2,2 кг (т. е. 10% от 22 кг). Так как сухие грибы содержат воду (12%), то 2,2 кг составляют 88% от веса сухих грибов, полученных из 22 кг свежих грибов. Отсюда

$$\frac{2{,}2}{88}\cdot 100=2{,}5\ (\text{кг})$$

— вес сухих грибов.

Задача 7. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена товара снизилась с a руб. до b руб. ($b<a$). На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз?

Решение. Пусть x — искомое число процентов. Тогда в первый раз цена товара снизится на $\frac{ax}{100}$ руб., и его новая цена будет

$$a-\frac{ax}{100}=a\left(1-\frac{x}{100}\right).$$

Во второй раз цена товара снизится на $\frac{a\left(1-\frac{x}{100}\right)}{100}$ руб.; и цена товара после двух снижений будет

$$a\left(1-\frac{x}{100}\right)-a\left(1-\frac{x}{100}\right)\cdot\frac{x}{100}=a\left(1-\frac{x}{100}\right)^2.$$

По условию она равна b руб. Поэтому

$$a\left(1-\frac{x}{100}\right)^2=b.$$

Чтобы решить это уравнение, запишем его в виде

$$\left(1-\frac{x}{100}\right)^2=\frac{b}{a}$$

и извлечем арифметический квадратный корень:

$$\left|1-\frac{x}{100}\right|=\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Так как $x<100$, то $\left|1-\frac{x}{100}\right|=1-\frac{x}{100}$. Следовательно, $1-\frac{x}{100}=$ $=\sqrt{\frac{b}{a}}$ или $x=100\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)(\%)$.

§ 3. Пропорции

Определение. *Пропорцией* называется верное равенство вида

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

где числа a, b, c, d не равны нулю.

Пропорцию можно записать иначе:

$$a:b=c:d.$$

Пропорция читается так: a относится к b, как c относится к d.

Числа a и d называются *крайними*, а числа b и c—*средними* членами пропорции.

Основное свойство пропорции: *произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.*

Это означает, что если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$.

Для доказательства умножим обе части исходного равенства на bd и получим

$$\frac{a}{b}\cdot bd=\frac{c}{d}\cdot bd$$

или $ad=bc$, что и утверждалось.

Верно и обратное утверждение: *если произведение двух чисел a и d равно произведению двух других чисел b и c ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$), то из этих чисел можно составить пропорцию.*

Действительно, пусть $ad=bc$. Разделим обе части этого равенства на bd и получим

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

что и утверждалось.

Из основного свойства пропорции вытекает, что $a=\frac{bc}{d}$ и $d=$ $=\frac{bc}{a}$ (крайний член пропорции равен произведению средних членов, деленному на известный крайний член пропорции), $b=\frac{ad}{c}$ и $c=\frac{ad}{b}$ (средний член пропорции равен произведению крайних членов, деленному на известный средний член пропорции).

Пусть дана пропорция

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \tag{1}$$

Согласно основному свойству пропорции

$$ad=bc. \tag{2}$$

Разделив обе части равенства (2) на cd, получаем

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}. \tag{3}$$

Пропорция (3) получается из пропорции (1) перестановкой средних членов пропорции.

Точно так же, разделив обе части равенства (2) на ab, получаем

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}. \tag{4}$$

Пропорция (4) получается из пропорции (1) перестановкой крайних членов пропорции.

Итак, в пропорции можно переставить: а) средние члены; б) крайние члены.

Пропорции (3) и (4), образованные из членов исходной пропорции (1), называются *производными пропорциями*.

Вообще, из пропорции (1) можно получить производную пропорцию вида

$$\frac{ka+lb}{ma+nb}=\frac{kc+ld}{mc+nd}, \tag{5}$$

где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$, $ma+nb\neq 0$, $mc+nd\neq 0$, $ka+lb\neq 0$, $kc+ld\neq 0$.

В самом деле, нетрудно проверить, что

$$(ka+lb)\cdot(mc+nd)=(kc+ld)(ma+nb),$$

если использовать равенство $ad=bc$ (т. е. основное свойство пропорции).

Давая числам k, l, m и n различные значения, получаем частные случаи производной пропорции (5). Например

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Справедливо также свойство равных отношений (равных дробей): из равенств

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n} \tag{6}$$

следуют равенства

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}. \qquad (7)$$

Действительно,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1},$$

так как из условия (6) нетрудно получить равенство

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,b_1=(b_1+b_2+\ldots+b_n)\,a_1,$$

что и доказывает справедливость равенств (7).

Кроме того, из равенств (6) следуют равенства

$$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_nb_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}. \qquad (8)$$

Действительно,

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{k_1a_1}{k_1b_1},\quad \frac{a_2}{b_2}=\frac{k_2a_2}{k_2b_2},\quad \ldots,\quad \frac{a_n}{b_n}=\frac{k_na_n}{k_nb_n}.$$

Тогда по свойству равных отношений получаем

$$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_nb_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

что и утверждалось.

С помощью пропорции решают различные задачи.

Задача 1. Составить пропорцию из чисел 15, 18, 35 и 42.

Решение. Так как $15\cdot42=18\cdot35$, то $\frac{15}{18}=\frac{35}{42}$ или $\frac{42}{18}=\frac{35}{15}$, или $\frac{42}{35}=\frac{18}{15}$, или $\frac{15}{35}=\frac{18}{42}$.

Задача 2. Из 2000 зерен пшеницы взошло 1800 зерен. Чему равен процент всхожести семян?

Решение. Пусть всхожесть семян равна r (%). Тогда один процент всхожести семян можно найти так: разделить 1800 на r или 2000 на 100. Отсюда $1800 : r = 2000 : 100$. Найдем неизвестный средний член этой пропорции:

$$r=\frac{1800\cdot100}{2000}=90\,(\%).$$

Задача 3. Чертеж составлен в масштабе 2 : 5. Чему будет равна длина болта на чертеже, если в натуре длина болта 60 мм?

Решение. Пусть x (мм) — длина болта на чертеже. Так как масштаб показывает отношение длины отрезка на чертеже к длине отрезка в натуре, то получим пропорцию $x : 60 = 2 : 5$. Найдем неизвестный крайний член этой пропорции:

$$x=\frac{60\cdot2}{5}=24\ (\text{мм}).$$

Рассмотрим решение более сложных задач.

Задача 4. Мясо при варке теряет 35 % своей массы. Сколько получится вареного мяса из 2 кг сырого? Сколько потребуется сырого мяса для получения 2,6 кг вареного?

Решение. Пусть из 2 кг сырого мяса получится x (кг) вареного мяса. Тогда $x : 2 = 65 : 100$ (так как при варке сохраняется 65% массы).

Отсюда $x = \frac{65 \cdot 2}{100} = 1{,}3$ (кг).

Пусть для получения 2,6 кг вареного мяса потребуется y (кг) сырого. Тогда $2{,}6 : y = 65 : 100$.

Отсюда

$$y = \frac{2{,}6 \cdot 100}{65} = 4 \text{ (кг)}.$$

Задача 5. Собственная скорость моторной лодки 20 км/ч, а скорость течения реки 4 км/ч. Двигаясь по течению, лодка прошла 120 км. Какое расстояние пройдет за это же время моторная лодка при движении против течения?

Решение. Скорость лодки при движении по течению реки равна $20 + 4 = 24$ (км/ч), а при движении против течения равна $20 - 4 = 16$ (км/ч). Поэтому $120 : 24 = x : 16$. Отсюда

$$x = \frac{120 \cdot 16}{24} = 80 \text{ (км)}$$

— искомое расстояние.

§ 4. Одночлены и многочлены. Стандартный вид одночленов и многочленов

Произведение нескольких чисел, обозначенных цифрами или буквами, называют *одночленом*.

Степень числа с натуральным показателем и произведение степеней чисел с натуральными показателями также называют одночленами, так как в виде степени можно записать произведение равных множителей. Каждое число a есть тоже одночлен, так как $a = a \cdot 1$.

Множители одночлена, записанные с помощью цифр, называются *числовыми* множителями этого одночлена, а множители, обозначенные буквами, называются *буквенными* множителями.

Стандартный вид одночлена—это такая запись одночлена, в которой есть только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и затем различные буквенные множители или их степени с натуральными показателями.

В стандартном виде одночлена нет одинаковых букв. Любой одночлен можно записать в стандартном виде. Для этого нужно умножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место, а затем произведения одинаковых буквенных множителей записать в виде степени. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называется *коэффициентом* этого одночлена.

Например, приведем к стандартному виду одночлен $3a^2bc^2(-2ab^2c)^3$. На основании свойств степени с натуральным показателем получим:

$$3a^2bc^2\cdot(-2ab^2c)^3 = 3a^2bc^2\cdot(-2)^3a^3(b^2)^3c^3 = 3a^2bc^2\cdot(-8)a^3b^6c^3.$$

Теперь, используя переместительное и сочетательное свойства умножения, а также свойство степени с одинаковыми основаниями, получим $3a^2bc^2\cdot(-8)a^3b^6c^3 = -24a^5b^7c^5$.

Одночлены называются *подобными*, если они одинаковы или отличаются только коэффициентами.

Одночлены умножаются по правилам умножения чисел. Для возведения одночлена в степень с натуральным показателем нужно возвести в эту степень каждый его множитель.

При умножении одночленов или возведении в натуральную степень снова получается одночлен.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней его буквенных множителей. Если одночленом является число, то степень такого одночлена считается нулевой. Числу 0 как одночлену не приписывается никакой степени.

Например, $5x^2$ — одночлен второй степени, $5x^3y^2z$ — одночлен шестой степени, 5 — одночлен нулевой степени.

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов, т. е. алгебраическое выражение, представляющее собой сумму или разность двух или нескольких одночленов.

Каждый одночлен, входящий в многочлен, называют *членом многочлена*. Подобные слагаемые в многочлене называют *подобными членами*.

Если все члены многочлена записать в стандартном виде и привести подобные члены, то получится многочлен *стандартного вида*.

Например, приведем к стандартному виду многочлен

$$3x(-2xy^2)+4x\cdot5xy^2-(5xy^2)^2+8x^2y^4.$$

Для этого надо записать все одночлены в стандартном виде и привести подобные члены:

$$3x(-2xy^2)+4x\cdot5xy^2-(5xy^2)^2+8x^2y^4 =$$
$$= -6x^2y^2+20x^2y^2-25x^2y^4+8x^2y^4 = 14x^2y^2-17x^2y^4.$$

В зависимости от числа членов многочлены называют двучленами, трехчленами и т. д. Одночлен также можно рассматривать как многочлен, состоящий из одного члена.

Степенью многочлена называют наибольшую степень одночлена, входящего в этот многочлен.

Например, в многочлене $2x^2y+5x^4y^3-xy+6$ наибольшую степень, равную 7, имеет одночлен $5x^4y^3$. Значит, степень этого многочлена тоже равна 7.

При сложении и вычитании нескольких многочленов надо привести подобные члены. В результате снова получается многочлен.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена. В результате снова получается многочлен; его нужно записать в стандартном виде.

Например,

$$(3x-2y+z)(5x-2z)=15x^2-6xz-10xy+4yz+5xz-2z^2=$$
$$=15x^2-xz-10xy+4yz-2z^2.$$

§ 5. Формулы сокращенного умножения

Рассмотрим формулы, часто применяемые при тождественных преобразованиях алгебраических выражений.

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (квадрат суммы).

Пользуясь правилом умножения многочлена на многочлен, получаем: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$, и тождество установлено.

2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (квадрат разности).

Доказывается аналогично: $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$.

Например, пользуясь тождествами для квадрата суммы и квадрата разности, получим

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac.$$

В самом деле, $(a-b+c)^2=((a-b)+c)^2=(a-b)^2+2(a-b)c+c^2=a^2-2ab+b^2+2ac-2bc+c^2$, что и утверждалось.

3. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (куб суммы).

Действительно, $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, и тождество установлено.

4. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (куб разности).

Доказывается аналогично тождеству для куба суммы.

Замечание. Полученные тождества можно записать иначе:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$
$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab,$$
$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b),$$
$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b),$$
$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b).$$

5. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

В самом деле, $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$ (разность квадратов).

6. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

Читается так, *произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих чисел.*

Доказательство тождества предоставим читателю.

7. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Словесную формулировку и доказательство тождества предоставим читателю.

Формулы сокращенного умножения можно применить и для приближенных вычислений.

Воспользуемся формулой $(1+a)^2 = 1+2a+a^2$. Отсюда $(1+a)^2 \approx 1+2a$. По этой формуле можно находить приближенное значение числа $(1+a)^2$ в тех случаях, когда a — положительное или отрицательное число, модуль которого мал по сравнению с единицей.

Например, $1{,}002^2 = (1+0{,}002)^2 \approx 1+2\cdot 0{,}002 = 1{,}004$ (с точностью до 0,001); $0{,}997^2 = (1-0{,}003)^2 \approx 1-2\cdot 0{,}003 = 0{,}994$ (с точностью до 0,001).

Отбрасывая a^2 в формуле $(n+a)^2 = n^2+2na+a^2$, получаем

$$(n+a)^2 \approx n^2+2na.$$

Например, $4{,}997^2 = (5-0{,}003)^2 \approx 5^2-2\cdot 5\cdot 0{,}003 = 24{,}97$.

По формуле разности квадратов имеем

$$(1+a)(1-a) = 1-a^2 \approx 1,$$

т. е. с точностью до a^2 получаем: $(1+a)(1-a) \approx 1$. Отсюда $\frac{1}{1+a} \approx 1-a$. Например,

$$\frac{1}{1{,}004} \approx 1-0{,}004 = 0{,}996; \quad \frac{1}{0{,}99} \approx 1+0{,}01 = 1{,}01.$$

§ 6. Многочлены с одной переменной

Многочлен n-й степени относительно x имеет вид

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 0$ — целое число, a_0, a_1, ..., a_n — постоянные (коэффициенты многочлена), буква (величина) x может принимать любые числовые значения (т. е. x — переменная величина).

Многочлен $P(x)$ был записан в стандартном виде по убывающим степеням x. Тот же многочлен $P(x)$ можно расположить и в ином порядке, например по возрастающим степеням x.

Таким образом, *многочленом* (или *полиномом*) относительно x называется выражение, в котором над величиной x производятся только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены относительно x с любыми действительными коэффициентами.

Определение. Два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ считаются *равными* (или *тождественно равными*)

$$P(x) = Q(x)$$

в том лишь случае, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

Очевидно, что равные многочлены принимают при всех значениях x одинаковые значения. В курсе высшей математики доказывается и обратное: если значения двух многочленов равны при всех значениях x, то многочлены равны, т. е. их коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают.

Многочлены можно складывать, вычитать, умножать. Действия сложения, вычитания и умножения многочленов обладают основными свойствами арифметических действий над числами. Многочленом нулевой степени является любое не равное нулю число. Число нуль также считается многочленом; это единственный многочлен, степень которого не определена.

Определение. Преобразование многочлена к виду произведения двух или нескольких многочленов ненулевой степени называется *разложением многочлена на множители*. Если многочлен может быть разложен на множители, то он называется *приводимым*; многочлен называется *неприводимым*, если его нельзя разложить на множители.

Например, x^2-a^2 — приводимый многочлен, так как

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a).$$

Очевидно, что многочлен $x+1$ неприводим. Многочлен x^2+1 также неприводим *).

Задача о разложении многочлена на множители аналогична задаче о разложении целых чисел на множители. Здесь неприводимые многочлены играют роль простых чисел, а приводимые многочлены — составных чисел.

Существуют различные способы разложения многочлена на множители (см. § 7). Одним из таких способов является так называемый метод неопределенных коэффициентов. Идея его состоит в следующем.

Пусть нам известно, что в результате некоторых преобразований получается выражение определенного вида и неизвестны только коэффициенты в этом выражении. Тогда эти коэффициенты обозначают буквами и рассматривают как неизвестные. Затем для определения этих неизвестных составляется система уравнений.

Например, в случае многочленов эти уравнения составляют из условия равенства коэффициентов при одинаковых степенях x у двух равных многочленов.

Поясним на примере.

Пример. Методом неопределенных коэффициентов показать, что выражение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ есть квадрат трехчлена.

Решение. Если данное выражение есть квадрат трехчлена, то справедливо равенство

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+ax+b)^2,$$

где a и b — искомые коэффициенты.

*) Точнее, многочлен x^2+1 неприводим на множестве действительных чисел. Этот многочлен приводим на множестве комплексных чисел.

Выполнив в этом равенстве действия, сравним коэффициенты при x^3 и x^2 в левой и правой частях. Получим систему

$$\begin{cases} 2a=10, \\ a^2+2b=35, \end{cases}$$

откуда находим $a=5$, $b=5$. Убеждаемся, что при этих значениях a и b также совпадают коэффициенты при x и x^0 (т. е. свободные члены). Итак, данное выражение равно $(x^2+5x+5)^2$.

§ 7. Тождественные преобразования многочленов

1. Разложение на множители. Рассмотрим различные приемы разложения многочленов на множители. В общем случае эти частные приемы не могут установить разложимости или неразложимости данного многочлена. На практике отдельные приемы используются в различных комбинациях и имеют важное значение.

Вынесение общего множителя и способ группировки. При использовании этого способа иногда целесообразно применение «искусственных» преобразований — разбиение отдельных членов на подобные слагаемые или введение взаимно уничтожающихся членов.

Пример 1. Разложить на множители $4a^2-c^4-2ac-c^3$.

Решение. $4a^2-c^4-2ac-c^3=(4a^2-c^4)-(2ac+c^3)=$ $=(2a+c^2)(2a-c^2)-c(2a+c^2)=(2a+c^2)(2a-c^2-c)$.

Пример 2. Разложить на множители $5a^5x^3+5a^2x^9$.

Решение. Сначала вынесем за скобки общий множитель $5a^2x^3$, а затем применим тождество $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (сумма кубов):

$$5a^5x^3+5a^2x^9=5a^2x^3(a^3+x^6)=5a^2x^3(a^3+(x^2)^3)=$$
$$=5a^2x^3(a+x^2)(a^2-ax^2+x^4).$$

Пример 3. Разложить на линейные множители многочлен $P(x)=x^3-3x-2$.

Решение. $P(x)=x^3-3x-2=x^3-x-2x-2=(x^3-x)-$ $-(2x+2)=x(x^2-1)-2(x+1)=x(x+1)(x-1)-2(x+1)=(x+$ $+1)(x^2-x-2)$.

Так как $x^2-x-2=x^2-x-1-1=(x^2-1)-(x+1)=(x+1)\times$ $\times(x-1)-(x+1)=(x+1)(x-2)$, то

$$P(x)=(x+1)^2(x-2).$$

Пример 4. Представить в виде произведения двух множителей многочлен $P(x)=x^5+x+1$.

Решение. Замечая, что $P(x)=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)$, получим $x^5+x+1=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)=x^2(x-1)(x^2+x+1)+$ $+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

Применение формул сокращенного умножения. С помощью формул сокращенного умножения суммы или разности представ-

ляются в виде произведения. Иногда полезно выделение квадратов.

Пример 5. Разложить на множители $(x-y)^3-8y^3$.

Решение. Имеем: $(x-y)^3-8y^3=(x-y)^3-(2y)^3=((x-y)-2y)((x-y)^2+(x-y)\,2y+(2y)^2)=(x-y-2y)(x^2-2xy+y^2+2xy-2y^2+4y^2)=(x-3y)(x^2+3y^2)$.

Пример 6. Разложить на множители многочлен $P(x, y, z)=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$.

Решение. Выделяя полный квадрат, имеем $P=(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2=(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)=(x^2-(y+z)^2)(x^2-(y-z)^2)=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$.

Пример 7. Разложить на множители многочлен $P(x, y, z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.

Решение. Подставим $(z-x)$ в виде $z-x=(z-y)-(x-y)$ и применим формулу $(a-b)^3=(a^3-b^3)-3ab(a-b)$. Тогда получим

$$P=(x-y)^3+(y-z)^3+((z-y)^3-(x-y)^3)-$$
$$-3(z-y)(x-y)((z-y)-(x-y))=$$
$$=(x-y)^3+(y-z)^3-(y-z)^3-(x-y)^3-3(z-y)(x-y)\times$$
$$\times(z-y-x+y)=3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Разложение квадратного трехчлена на множители. При использовании формулы (см. § 4 гл. VI)

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\quad(a\neq 0,\ D=b^2-4ac\geqslant 0),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c, иногда удобно ввести вспомогательные неизвестные.

Пример 8. Разложить на множители многочлен $P(x)=(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

Решение. $P(x)=(x^2+x+1)((x^2+x+1)+1)-12=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12$. Пусть $x^2+x+1=y$.

Тогда имеем $y^2+y-12=(y+4)(y-3)$, так как корни трехчлена y^2+y-12 равны (-4) и 3. Переходя от y к x, получаем

$$P(x)=(x^2+x+5)(x^2+x-2).$$

Так как трехчлен $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, то

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+x+5).$$

II. Вычисление выражений.

Пример 9. Найти значение выражения $A=x^3+x^2y-xy^2-y^3$ при $x=3{,}6$, $y=-2{,}6$.

Решение. Выполним преобразование $A=x^3+x^2y-xy^2-y^3=(x^3+x^2y)-(xy^2+y^3)=x^2(x+y)-y^2(x+y)=(x+y)(x^2-y^2)=(x+y)^2(x-y)$. Подставляя $x=3{,}6$, $y=-2{,}6$, получим $A=(3{,}6-2{,}6)^2(3{,}6+2{,}6)=6{,}2$.

Пример 10. Вычислить выражение $A=x^3y+xy^3$, если $x-y=4$, $xy=3$.

Решение. Имеем: $A = xy(x^2+y^2) = xy((x^2-2xy+y^2)+2xy) = xy((x-y)^2+2xy)$. Отсюда $A = 3(16+6) = 66$.

Пример 11. Дано $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Вычислить $A = a^4+b^4+c^4$.

Решение. Выделяя полный квадрат в выражении A, имеем

$$A = (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) = \\ = (a^2+b^2+c^2)^2 - 2((ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c)).$$

Согласно данным условиям $A = 1-2(ab+ac+bc)^2$, и остается найти значение выражения $ab+ac+bc$. Так как $2(ab+ac+bc) = (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2) = -1$, то $A = 1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

§ 8. Алгебраические дроби. Иррациональные выражения

Алгебраическое выражение называется рациональным, если над всеми величинами (буквами), входящими в это выражение, производятся только действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с целым показателем.

Рациональные выражения подразделяются на целые и дробные. Если рациональное выражение не содержит деления и возведения в целую отрицательную степень, то оно называется целым рациональным выражением или многочленом.

Алгебраической дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, у которой числитель $P(x)$ и знаменатель $Q(x)$ — многочлены. Дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ рассматривается только для допустимых значений входящих в нее величин (букв), т. е. для тех значений, при которых Q — знаменатель этой дроби — не равен нулю.

Определение. Алгебраические дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{и} \quad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

считаются *равными* (или *тождественно равными*), если выполняется равенство для многочленов

$$P(x)\,Q_1(x) = P_1(x)\,Q(x).$$

Например,

$$\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \qquad (x \neq 1,\ x \neq -1),$$

так как $(x+1)(x-1) = 1(x^2-1)$.

Из определения равенства дробей вытекает, что алгебраическая дробь не изменится, если числитель и знаменатель умножить на один и тот же многочлен $K(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\,K(x)}{Q(x)\,K(x)} \qquad (Q(x) \neq 0,\ K(x) \neq 0)$$

(основное свойство алгебраической дроби).

На этом свойстве основано сокращение алгебраических дробей, т. е. деление числителя и знаменателя на их общий множитель (многочлен, входящий в разложение числителя и знаменателя одновременно), и приведение дробей к общему знаменателю.

Сложение и умножение алгебраических дробей определяются по следующим правилам:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P(x)\,Q_1(x)+P_1(x)\,Q(x)}{Q(x)\,Q_1(x)},$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P(x)\,P_1(x)}{Q(x)\,Q_1(x)},$$

где $Q(x)\neq 0$, $Q_1(x)\neq 0$.

Вычитание и деление алгебраических дробей определяются как действия, обратные сложению и умножению. Из этого определения выводятся правила вычитания и деления:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P(x)\,Q_1(x)-P_1(x)\,Q(x)}{Q(x)\,Q_1(x)},$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P(x)\,Q_1(x)}{P_1(x)\,Q(x)},$$

где $Q(x)\neq 0$, $Q_1(x)\neq 0$ и, кроме того, в случае деления $P_1(x)\neq 0$.

Для алгебраических дробей сохраняются основные свойства арифметических действий. Практически для выполнения сложения или вычитания дроби приводят к общему знаменателю: разложив знаменатели дробей на множители, принимают за общий знаменатель многочлен наименьшей степени, который делится нацело на все данные знаменатели. Очевидна аналогия с арифметическими дробями.

Точно так же определяются равенство и действия для алгебраических дробей вида $\frac{P(x,\ y,\ \ldots,\ z)}{Q(x,\ y,\ \ldots,\ z)}$.

Определение. Две равные алгебраические дроби образуют пропорцию

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1},$$

где P, Q, P_1, Q_1 — многочлены относительно x или относительно x, y, $\ldots$, z, причем $Q\neq 0$, $Q_1\neq 0$.

Во всякой пропорции произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов, т. е.

$$PQ_1=P_1Q.$$

Верно и обратное: при выполнении условия $PQ_1=P_1Q$ дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$ образуют пропорцию $\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1}$, где $Q\neq 0$, $Q_1\neq 0$.

Из пропорции $\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1}$ $(Q\neq 0,\ Q_1\neq 0)$ можно получить производную пропорцию

$$\frac{KP+LQ}{MP+NQ}=\frac{KP_1+LQ_1}{MP_1+NQ_1}\quad (Q\neq 0,\ Q_1\neq 0,\ MP+NQ\neq 0,\ MP_1+NQ_1\neq 0)$$

(сравните с § 3 о пропорциях для чисел).

Рассмотрим примеры на действия с алгебраическими дробями.

Пример 1. Выполнить действия:

$$\left(1+\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}\right)\left(\frac{3x}{2x-y}-\frac{2x+y}{x}\right).$$

Решение. Сначала выполним действия в скобках:

$$1+\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2-y^2+x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{2x^2-2xy}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{2x(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{2x}{x+y};$$

$$\frac{3x}{2x-y}-\frac{2x+y}{x}=\frac{3x^2-4x^2+y^2}{(2x-y)x}=\frac{y^2-x^2}{x(2x-y)}.$$

Затем умножим полученные дроби:

$$\frac{2x}{x+y}\cdot\frac{y^2-x^2}{x(2x-y)}=\frac{2x(y-x)(y+x)}{x(x+y)(2x-y)}=\frac{2(y-x)}{2x-y}=-\frac{2(x-y)}{2x-y}.$$

Допустимые значения: $x\neq y$, $x\neq -y$, $x\neq 0$, $2x-y\neq 0$.

Пример 2. Упростить выражение

$$\left(\frac{x}{x-2}+\frac{x^2}{x^3+8}\cdot\frac{x^2-2x+4}{2-x}\right):\frac{8}{x^2-4x+4}-\frac{x^2+x+6}{4x+8}.$$

Решение. Порядок выполнения действий над алгебраическими дробями такой же, как для действий над числами: сначала выполняют возведение в степень, затем — умножение и деление и, наконец, сложение и вычитание; при наличии скобок прежде всего выполняют действие в скобках. В данном примере:

1) $\frac{x^2}{x^3+8}\cdot\frac{x^2-2x+4}{2-x}=\frac{x^2(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)(2-x)}=\frac{x^2}{(x+2)(2-x)}.$

Было использовано тождество $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и сокращение дроби.

2) $\frac{x}{x-2}+\frac{x^2}{(x+2)(2-x)}=\frac{x}{x-2}-\frac{x^2}{(x+2)(x-2)}=$

$$=\frac{x^2+2x-x^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}.$$

3) $\frac{2x}{(x+2)(x-2)}:\frac{8}{x^2-4x+4}=\frac{2x(x^2-4x+4)}{8(x+2)(x-2)}=\frac{2x(x-2)^2}{8(x+2)(x-2)}=$

$$=\frac{x(x-2)}{4(x+2)}.$$

4) $\frac{x(x-2)}{4(x+2)}-\frac{x^2+x+6}{4x+8}=\frac{x^2-2x-x^2-x-6}{4(x+2)}=\frac{-3(x+2)}{4(x+2)}=-\frac{3}{4}.$

Полученные результаты справедливы для всех значений x, удовлетворяющих условиям: $x^3+8\neq 0$, $x-2\neq 0$, т. е. при $x\neq -2$, $x\neq 2$.

Пример 3. Сократить дробь $\frac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$a^4-16=(a^2)^2-4^2=(a^2+4)(a^2-4)=(a^2+4)(a+2)(a-2),$$

$$a^4-4a^3+8a^2-16a+16=(a^4+8a^2+16)-(4a^3+16a)=$$

$$=(a^2+4)^2-4a(a^2+4)=(a^2+4)(a^2+4-4a)=(a^2+4)(a-2)^2.$$

Поэтому данная дробь равна дроби

$$\frac{(a^2+4)(a+2)(a-2)}{(a^2+4)(a-2)^2}=\frac{a+2}{a-2},\text{ где } a\neq 2.$$

Пример 4. Найти числовое значение выражения

$$\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{4}{x^4+4x^3+4x^2}+\frac{4}{x^3+2x^2}$$

при $x=0{,}5$.

Решение. Сначала преобразуем данное выражение:

$$\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{4}{x^2(x^2+4x+4)}+\frac{4}{x^2(x+2)}=\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{4}{x^2(x+2)^2}+\frac{4}{x^2(x+2)}=$$

$$=\frac{x^2-4+4(x+2)}{x^2(x+2)^2}=\frac{x^2-4+4x+8}{x^2(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+4}{x^2(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2}{x^2(x+2)^2}=\frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, искомое числовое значение выражения равно $\frac{1}{0{,}5^2}=4$.

Пример 5. Бассейн наполняется одной трубой за a часов, другой — за b часов. За сколько часов наполнится бассейн, если одновременно открыть обе трубы?

Решение. Пусть объем бассейна равен V. За час первая труба заполнит объем, равный $\frac{V}{a}$, вторая — объем, равный $\frac{V}{b}$, а вместе трубы за час заполняют $\left(\frac{V}{a}+\frac{V}{b}\right)$. Пусть t — искомое время. За t часов обе трубы заполнят весь бассейн, т. е. $\left(\frac{V}{a}+\frac{V}{b}\right)t=V$. Сумма дробей, стоящих в скобках, равна $\frac{V(a+b)}{ab}$. Следовательно, $\frac{V(a+b)}{ab}\cdot t=V$ или, сокращая на V, $\frac{a+b}{ab}\cdot t=1$, откуда $t=\frac{ab}{a+b}$ (часов).

Преобразования иррациональных алгебраических выражений производятся на основании общих законов арифметических действий (таких же, как в случае алгебраических дробей) и правил действий над корнями (см. гл. IV, § 7). Специфическим является только «уничтожение иррациональности» в числителе или знаменателе дробного иррационального выражения вида $A=\frac{P}{Q}$, где хотя бы одно из выражений P или Q содержит корни (радикалы).

Пусть S—данное выражение, содержащее корни.

Определение. *Сопряженным множителем относительно* S называется всякое выражение K, не равное тождественно нулю, такое, что выражение SK не содержит корней.

Знание сопряженного множителя позволяет представить выражение $A=\frac{P}{Q}$ в виде выражения, не содержащего корней либо в числителе, либо в знаменателе:

$$A=\frac{PK_1}{QK_1}=\frac{PK_2}{QK_2},$$

где K_1—сопряженный множитель числителя P, K_2—сопряженный множитель знаменателя Q. Это преобразование и называется уничтожением иррациональности (соответственно в числителе или в знаменателе).

Рассмотрим важные частные случаи отыскания сопряженного множителя.

1. Для выражения вида

$$S=\sqrt[n]{X^pY^q\ldots Z^l} \quad (X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0,\ \ldots,\ Z\geqslant 0),$$

где p, q, ..., l—натуральные числа, меньшие n ($n\geqslant 2$), сопряженный множитель K есть

$$K=\sqrt[n]{X^{n-p}Y^{n-q}\ldots Z^{n-l}},$$

так как $SK=XY\ldots Z$.

2. Для выражения вида

$$S=\sqrt{X}+\sqrt{Y} \quad (X\geqslant 0,\quad Y\geqslant 0)$$

сопряженный множитель есть

$$K=\sqrt{X}-\sqrt{Y},$$

так как $SK=(\sqrt{X})^2-(\sqrt{Y})^2=X-Y$.

Для выражения вида

$$S=\sqrt{X}-\sqrt{Y} \quad (X\geqslant 0,\quad Y\geqslant 0)$$

сопряженный множитель $K=\sqrt{X}+\sqrt{Y}$.

3. Для выражения вида

$$S=\sqrt[3]{X}+\sqrt[3]{Y} \quad (X\geqslant 0,\quad Y\geqslant 0)$$

сопряженный множитель есть

$$K=\sqrt[3]{X^2}-\sqrt[3]{XY}+\sqrt[3]{Y^2},$$

так как

$$SK=(\sqrt[3]{X})^3+(\sqrt[3]{Y})^3=X+Y.$$

Для выражения вида

$$S=\sqrt[3]{X}-\sqrt[3]{Y} \quad (X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0)$$

сопряженный множитель есть

$$K=\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{XY}+\sqrt[3]{Y^2}.$$

Пример 6. Выполнить действия: $\frac{9}{5-\sqrt{7}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

Решение. Сначала освободимся от иррациональности в знаменателе. Для этого умножим числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю. Для $5-\sqrt{7}$ сопряженным множителем будет $5+\sqrt{7}$, для $7+\sqrt{5}$ сопряженный множитель есть $7-\sqrt{5}$, а для $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ сопряженный множитель равен $\sqrt{7}-\sqrt{5}$. Поэтому

$$\frac{9}{5-\sqrt{7}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{9(5+\sqrt{7})}{(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})}+\frac{22(7-\sqrt{5})}{(7+\sqrt{5})(7-\sqrt{5})}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{9(5+\sqrt{7})}{25-7}+\frac{22(7-\sqrt{5})}{49-5}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}=\frac{5+\sqrt{7}}{2}+\frac{7-\sqrt{5}}{2}-$$

$$-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\frac{5+\sqrt{7}+7-\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}=6.$$

Пример 7. Упростить выражение

$$\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right).$$

Решение. Выражение имеет смысл при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x\neq y$ (условия существования арифметического квадратного корня и дроби). Заметим, что дробь $\frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ можно сократить: так как $y\geqslant 0$, то $y=\sqrt{y^2}$ и

$$\frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{y}.$$

Отсюда выражение, стоящее в первой скобке, равно $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

Выполним действия, указанные во второй скобке.

Заметим, что выражение $x-y$ можно разложить на множители:

$$x-y=\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=$$
$$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=$$
$$=\frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=$$
$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

Теперь остается найти произведение выражений $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ и $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. Получим

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x\neq y$.

Пример 8. Освободиться от иррациональности в знаменателе $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$.

Решение. Сопряженный множитель для выражения $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ равен $(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}=$$
$$=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$$

(использовано тождество $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$).

Пример 9. Уничтожить иррациональность в знаменателе выражения $A=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

Решение. Имеем

$$A=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{z}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{z}}{((\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{z})((\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{z})}=$$
$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{z})^2}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{x+y-z+2\sqrt{xy}}.$$

Поэтому

$$A=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(x+y-z-2\sqrt{xy})}{(x+y-z+2\sqrt{xy})(x+y-z-2\sqrt{xy})}=$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(x+y-z-2\sqrt{xy})}{(x+y-z)^2-4xy},$$

где $x>0$, $y>0$, $z>0$, $x+y-z-2\sqrt{xy}\neq 0$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\neq 0$.

§ 9. Тождественные преобразования алгебраических выражений (решение задач)

При выполнении тождественных преобразований прежде всего надо найти область определения или область допустимых значений (ОДЗ) заданного выражения A, которое требуется преобразовать. Выполняя затем тождественное преобразование, следует учитывать, что области определения заданного выражения A и полученного из него выражения B могут оказаться различными.

Упрощение выражений. В некоторых случаях при упрощении выражений целесообразно не приводить сразу к общему знаменателю, а, наоборот, сложную дробь разбивать на более простые дроби.

Пример 1. Упростить выражение

$$A=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение. Допустимыми являются те значения a, b и c, для которых $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$. Преобразуем сначала первое слагаемое, разбивая его на две дроби:

$$B_1=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)+(b-a)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}.$$

Аналогично

$$B_2=\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{(b-a)+(c-b)}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a},$$

$$B_3=\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{(c-b)+(a-c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}.$$

Поэтому

$$A=B_1+B_2+B_3=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

При выполнении действий над арифметическими корнями надо следить за соблюдением условия неотрицательности подкоренного выражения.

Пример 2. Упростить выражение

$$A=\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

Решение. Выполняя действия над арифметическими корнями, получаем

$$A=\sqrt[6]{(9+4\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=$$

$$=\sqrt[6]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}+\sqrt[3]{5-4}=\sqrt[3]{81-80}+1=2.$$

Пример 3. Упростить выражение

$$A=\frac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}.$$

Решение. Выражение A имеет смысл при $a \neq 0$. Так как

$$\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2+1=\frac{(a^2-1)^2+4a^2}{4a^2}=\frac{(a^2+1)^2}{4a^2}=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2,$$

то

$$A=\frac{a^2+1}{a\left|\frac{a^2+1}{2a}\right|}=\frac{a^2+1}{a\cdot\frac{a^2+1}{2|a|}}=2\cdot\frac{|a|}{a}$$

или

$$A=\begin{cases}2, & \text{если } a>0,\\ -2, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Пример 4. Упростить выражение

$$\left(\frac{a-4b}{a+\sqrt{ab}-6b}-\frac{a-9b}{a+6\sqrt{ab}+9b}\right)\cdot\frac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}}.$$

Решение. Обозначим все выражение через A, первую дробь — B, вторую — C и третью — D. Тогда $A=(B-C)D$. Очевидно, должно быть $a\geqslant 0$, $b>0$. Поэтому $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}a+\sqrt{ab}-6b&=a+\sqrt{ab}-2b-4b=(a-4b)+\sqrt{b}(\sqrt{a}-2\sqrt{b})=\\&=(\sqrt{a}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}-2\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{a}-2\sqrt{b})=\\&=(\sqrt{a}-2\sqrt{b})(\sqrt{a}+3\sqrt{b}).\end{aligned}$$

Замечание. Если положить $\sqrt{a}=x$, то $a+\sqrt{ab}-6b=x^2+\sqrt{b}\,x-6b$ — квадратный трехчлен относительно x. Находим его разложение на множители; подставляя затем $x=\sqrt{a}$, получим другим способом разложение $a+\sqrt{ab}-6b=(\sqrt{a}-2\sqrt{b})\times(\sqrt{a}+3\sqrt{b})$.

Имеем

$$B=\frac{(\sqrt{a}-2\sqrt{b})(\sqrt{a}-2\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-2\sqrt{b})(\sqrt{a}+3\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{b}}\quad(\sqrt{a}\neq 2\sqrt{b}\ \text{ или }\ a\neq 4b),$$

$$C=\frac{(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}-3\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2}=\frac{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}},$$

$$B-C=\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}=\frac{5\sqrt{b}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$$

$$D=\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-3\sqrt{b})}\quad(\sqrt{a}\neq 3\sqrt{b}\ \text{ или }\ a\neq 9b).$$

Следовательно,

$$A=\frac{5\sqrt{b}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-3\sqrt{b})}=\frac{5}{a-9b},$$

если $a\geqslant 0$, $b>0$, $a\neq 4b$, $a\neq 9b$.

Пример 5. Упростить выражение

$$A=\frac{\sqrt{a^3b}\sqrt[3]{a^4}+\sqrt{a^4b^3}:\sqrt[6]{a}}{(b^2-ab-2a^2)\sqrt{ab}}-a^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3a^2}{3b-6a+2ab-b^2}:\frac{a+b}{3a-ab}-\frac{ab}{a+b}\right).$$

Решение. Так же, как и в предыдущем примере, разбиваем данное громоздкое выражение на более простые части и упрощаем каждую из них отдельно. Очевидно, должно быть $a>0$ (в выражении есть корень $\sqrt[6]{a}$, на который производится деление), а так как $ab>0$, то и $b>0$.

Так как

$$b^2-ab-2a^2=(b^2-a^2)-a(b+a)=(b+a)(b-2a),$$
$$3b-6a+2ab-b^2=3(b-2a)+b(2a-b)=(b-2a)(3-b),$$
$$3a-ab=a(3-b),$$

то допустимые значения a и b удовлетворяют условиям: $a>0$, $b>0$, $b\neq 2a$, $b\neq 3$.

Преобразуя выражение A по частям, получим

$$B_1=\frac{\sqrt{a^3b}\sqrt[3]{a^4}+\sqrt{a^4b^3}:\sqrt[6]{a}}{(b^2-ab-2a^2)\cdot\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt[6]{(a^3b)^3(a^4)^2}+\sqrt[6]{\frac{(a^4b^3)^3}{a}}}{(b+a)(b-2a)\sqrt{ab}}=$$
$$=\frac{\sqrt[6]{a^{17}b^3}+\sqrt[6]{a^{11}b^9}}{(b+a)(b-2a)\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt[6]{a^{11}b^3}\left(\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{b^6}\right)}{(b+a)(b-2a)\sqrt[6]{a^3b^3}};$$
$$\sqrt[6]{a^6}=|a|=a,\quad \sqrt[6]{b^6}=|b|=b\quad (a>0,\ b>0),$$

следовательно,

$$B_1=\frac{\sqrt[6]{a^8}}{b-2a}=\frac{\sqrt[3]{a^4}}{b-2a}=\frac{a\sqrt[3]{a}}{b-2a};$$

$$B_2=a^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3a^2}{3b-6a+2ab-b^2}:\frac{a+b}{3a-ab}-\frac{ab}{a+b}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\left(\frac{3a^2a(3-b)}{(b-2a)(3-b)(a+b)}-\frac{ab}{a+b}\right)=\sqrt[3]{a}\cdot\frac{3a^2-b(b-2a)}{(b-2a)(a+b)}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{a}(3a^2+2ab-b^2)}{(b-2a)(a+b)};$$

так как

$$3a^2+2ab-b^2=2a^2+a^2+2ab-b^2=$$
$$=2a(a+b)+(a^2-b^2)=(a+b)(3a-b),$$

то $B_2=\frac{\sqrt[3]{a}(3a-b)}{b-2a}$. Поэтому

$$A=B_1-B_2=\frac{a\sqrt[3]{a}}{b-2a}-\frac{\sqrt[3]{a}(3a-b)}{b-2a}=\frac{\sqrt[3]{a}(a-3a+b)}{b-2a}=\sqrt[3]{a}.$$

Итак, $A=\sqrt[3]{a}$ при $a>0$, $b>0$, $b\neq 2a$, $b\neq 3$.

Пример 6. Упростить выражение $A=\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$, если $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$, причем $m>0$, $0<n<1$.

Решение. Имеем

$$(m+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{m+x}=\sqrt{m+\frac{2mn}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{m(n^2+1+2n)}{n^2+1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{m(n+1)^2}{n^2+1}};$$

аналогично $(m-x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{m-x}=\sqrt{\dfrac{m(n-1)^2}{n^2+1}}$. Поэтому данное выражение

$$A=\frac{\sqrt{\frac{m(n+1)^2}{n^2+1}}+\sqrt{\frac{m(n-1)^2}{n^2+1}}}{\sqrt{\frac{m(n+1)^2}{n^2+1}}-\sqrt{\frac{m(n-1)^2}{n^2+1}}}=\frac{\sqrt{(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2}}{\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{(n-1)^2}}$$

(при $m>0$ подкоренное выражение положительно).

Отсюда $A=\dfrac{|n+1|+|n-1|}{|n+1|-|n-1|}$. По условию $0<n<1$. Следовательно, $n+1>0$, $n-1<0$, и значит, $|n+1|=n+1$, $|n-1|=-(n-1)$. Получим

$$A=\frac{(n+1)-(n-1)}{(n+1)+(n-1)}=\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}.$$

Доказательство тождеств. При доказательстве тождеств надо путем равносильных преобразований свести их к таким, справедливость которых уже известна, или преобразовать одну часть тождества так, чтобы получить другую.

Пример 7. Доказать тождество

$$\frac{1+a^2+a}{1-a^3}+\frac{a-a^2}{(1-a)^3}=\frac{1}{(1-a)^2}.$$

Решение. Обозначим левую часть доказываемого тождества через A. Тогда

$$A=\frac{1+a+a^2}{(1-a)(1+a+a^2)}+\frac{a(1-a)}{(1-a)^3}=\frac{1}{1-a}+\frac{a}{(1-a)^2}=\frac{1-a+a}{(1-a)^2}=\frac{1}{(1-a)^2},$$

что и требовалось доказать. Итак, тождество справедливо для всех $a\neq 1$.

Пример 8. Дано: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}=0$. Доказать, что $(x+y-z)^3=-27xyz$.

Решение. Из условия следует, что $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$. Возведем обе части этого равенства в куб:

$$x+y+3\sqrt[3]{xy}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})=z$$

(по формуле $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$).

Отсюда $x+y-z=-3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$ или $x+y-z=-3\sqrt[3]{xyz}$, т. е.

$$(x+y-z)^3=-27xyz.$$

Пример 9. Доказать, что $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2}{b^2}$, если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

Решение. Из данной пропорции $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ следует, что $\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}$, для которой можно образовать производную пропорцию $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2}{b^2}$, что и требовалось доказать.

Вычисление выражений.

Пример 10. Вычислить $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Решение. Заметим, что $4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$, $4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$. Поэтому $A=|\sqrt{3}+1|-|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1=2$.

Упражнения

Раздел I

1. Цену товара сначала снизили на 20%, а затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

2. Ленту длиной 1,98 м разрезали на две части так, что одна часть оказалась на 20% длиннее другой. Найти длину каждой части.

3. Объем монтажных работ увеличился на 80%. На сколько процентов надо увеличить число рабочих, чтобы выполнить работу за то же время, если производительность труда при этом будет увеличена на 20%?

4. На карте расстояние между двумя пунктами равно 3,5 см. Каково расстояние между этими пунктами в действительности, если масштаб карты 1:2 000 000?

5. Рабочий изготовил 480 деталей, выполнив задание на 120%. Сколько деталей изготовил бы рабочий, если бы он выполнил задание на 110%?

Разложить на множители (№ 6—10):

6. $3x^3+x^2-x-3$. **7.** $a^3+a^2c+abc+b^3$.

8. $a^4+3a^2b^2+4b^4$. **9.** x^4+y^4. **10.** $2a^2+ab-b^2-2a+b$.

11. Доказать тождества:

а) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=x^8-y^8$;

б) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

12. Доказать, что сумма дробей $\frac{x^2-1}{(x-1)x+1}+\frac{1-2x}{(1-x)x-1}$ равна сумме их кубов.

13. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3b}}$; б) $\frac{1}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}}$.

14. Освободиться от иррациональности в числителе: $\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{5}$.

15. Сократить дроби:

а) $\frac{x^4-2x^2y^2+9y^4}{x^2-2xy+3y^2}$; б) $\frac{2a+3\sqrt{ab}-9b}{a+5\sqrt{ab}+6b}$.

Упростить выражения (№ 16—35):

16. $\frac{x}{y}\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}\left(\frac{y^3}{x^3}-\frac{y^4}{x^4}\right)\right)\right)$.

17. $\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right)$.

18. $\frac{x^2-y^2}{x-y}-\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$.

19. $\left(\frac{a-1}{a^2-2a+1}+\frac{2(a-1)}{a^2-4}-\frac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\frac{a}{a^2-3a+4}\right)\cdot$
$\cdot\frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}$.

20. $\left(\frac{2a^2+5ab+2b^2}{a^2-ab-2b^2}:\frac{a+2b}{a-2b}\right)\left(\frac{2a-b}{3a+b}-\frac{12a^2-b^2}{6a^2+5ab+b^2}+\frac{3a-b}{2a+b}\right)$.

21. $\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\frac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5}-\frac{1-x+x^2}{x^3}\right)$.

22. $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$. 23. $\left(\frac{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+1)^2-\frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}\right)^{-3}$.

24. $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}+a-1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$.

25. $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$.

26. $\frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}$.

27. $\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+\frac{3}{a}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$.

28. $\left(\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$.

29. $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

30. $\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)+\left(1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

31. $\dfrac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$ при $x=\dfrac{2am}{b(1+m^2)}$, $a>0$, $b\neq 0$, $|m|<1$.

32. $\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2-4a+4}$.

33. $\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}x^2-2ax+a\sqrt{b}$, если $x=\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

34. $\left(a+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, если $x=4(a-1)$, $1<a<2$.

35. $(1+x^{-1})^{-2}+(1-x^{-1})^{-2}$, если $x=(1-n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1+n^{-1})^{-\frac{1}{2}}$.

Доказать тождества (№ 36—40):

36. $(2+xy+x+y)^2+(2-xy+x-y)^2=2(x+2)^2+2y^2(y+1)^2$.

37. $\dfrac{a^2}{xy}+\dfrac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\dfrac{(a+y)^2}{xy-y^2}=1$.

38. $a^{\frac{1}{2}}-\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=0$.

39. $\dfrac{a}{b^3-1}-\dfrac{b}{a^3-1}=\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$, если $a+b=1$.

40. $(a+b)(a+c)(b+c)=0$, если $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+a}$.

Вычислить значения данных выражений (№ 41—45):

41. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right):\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ при $x=-3\dfrac{3}{4}$.

42. $\dfrac{a^2-2a+1}{a-3}\cdot\left(\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right)$ при $a=-0{,}01$.

43. $(a^2-b^2-c^2+2bc):\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$ при $a+c=2$; $b=\sqrt{3}$.

44. $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ при $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$, $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

45. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$ при $a=1{,}2$; $b=\dfrac{3}{5}$.

Раздел II

46. Найти 110% от 47 р. 20 к.; 80% от 1 ч 15 мин.

47. Найти число, если 35% его составляют 63.

48. Товар со скидкой в 12% был продан за 44 р. Какова была первоначальная стоимость товара?

49. В 20 л раствора, содержащего 4% соли, добавили 15 л воды. Какова стала концентрация соли в новом растворе?

50. Масштаб топографической карты 1:50 000. Каково расстояние на местности, если на карте оно составляет 1,5 мм; 2,8 см?

51. Цена товара снизилась на 20%. На сколько процентов надо повысить новую цену товара, чтобы получить его первоначальную стоимость?

52. В сберкассу на срочный вклад было положено 500 р. (через год размер вклада увеличивается на 3%). Какая сумма будет на сберкнижке через 2 года?

53. Улучшение организации производства повысило производительность труда на 10%, а рационализаторские предложения снова повысили производительность на 20%. На сколько процентов повысилась производительность труда по сравнению с первоначальной?

54. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена товара снизилась с 25 р. до 16 р. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз?

55. Из 4 кг лепестков розы получается 1 г розового масла. Каков выход розового масла?

56. Макет здания выполнен в масштабе 3 : 140 и имеет высоту 75 см. Какова планируемая высота здания?

57. Высев семян пшеницы составил 5 000 000 зерен на 1 га. Сколько растений будет на 1 м², если всхожесть семян 96%.

58. Показать, что равенство

$$\frac{a^2-3c^2}{b^2-3a^2}=\frac{2a^2+c^2}{2b^2+d^2}$$

обусловливает пропорциональность величин a, b, c, d.

59. Привести к стандартному виду многочлен

$$-10a^2\cdot(3b^2a)^3+4a^3b^5a-21\,(ab^2)^2a^3b^2+5a\,(ba)^3b^2.$$

60 (устно). Определить степень многочленов:

а) $13x^3y^5z+7xy^8z^4+\frac{1}{3}x^2y^2z^7$; б) $-0{,}2a^{22}b^{13}+24a^{30}+b^{35}$.

61. Определить степень многочлена, полученного после выполнения умножения:

$$-6m^2nk\left(\frac{1}{2}mn^2-\frac{1}{3}n^2k-\frac{1}{6}m^3k^2\right).$$

62. Вычислить устно: $2{,}95^2$; 103^2; $19\cdot21$; $89\cdot91$.

63. Применяя формулу $(1\pm a)^2\approx1\pm2a$, найти приближенные значения чисел $(1{,}004)^2$ и $(0{,}997)^2$ с точностью до 0,001.

64. Применяя формулу $\frac{1}{1+a}\approx1-a$, найти приближенные значения выражений $\frac{1}{1{,}002}$ и $\frac{1}{0{,}997}$ с точностью до 0,001.

Разложить на множители (№ 65—69):

65. $3x^2-42xy+147y^2$.

66. $(x^3+y^2)(x^2+y^3)-(x^3-y^2)(x^2-y^3)$.

67. $36z^2-(5z-1)^2$. **68.** a^4+4b^4. **69.** x^5+x^4+1.

70. Доказать, что если $a-b$ делится на 3, то a^3-b^3 делится на 9 (a и b — натуральные числа).

71. Найти наименьшее числовое значение выражения $x^2-6x+30$.

72. При каком значении x трехчлен $16x-10-x^2$ принимает наибольшее значение? Найти это наибольшее значение.

73. Методом неопределенных коэффициентов показать, что выражение $(x+2)(x+4)(x+5)-2x^2-11x-13$ есть куб двучлена.

74. Доказать тождество

$$4(d+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2=$$
$$=(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d).$$

75. Доказать тождество

$$(a-x)\,y^3-(a-y)\,x^3+(x-y)\,a^3=(a-x)\,(a-y)\,(x-y)\,(a+x+y).$$

76. Упростить выражение

$$\frac{1+(n+x)^{-1}}{1-(n+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-(n^2+x^2)}{2nx}\right)$$

и найти его значение при $x=\dfrac{1}{n-1}$.

77. Доказать, что если $x+y+z=0$, то $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

78. Вычислить:

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}\quad\text{при}\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

79. Упростить:

$$\sqrt{x^{\frac{3}{2}}y^{-2}-6x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{3}}+9y^{\frac{4}{3}}}.$$

80. Упростить:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}}.$$

81. Доказать тождество

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}-1}-a=-1.$$

82. Доказать тождество

$$\left(\frac{\left(a+\sqrt[3]{a^2x}\right):\left(x+\sqrt[3]{ax^2}\right)-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3=\frac{a^3}{x^4}.$$

83. Доказать тождество

$$\sqrt{a}\left(\frac{a+\sqrt[4]{a^3b^2}+b\sqrt[4]{ab^2}+b^2}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)^2}-b\right)^{-1}+\frac{1}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-1}=0.$$

Найти значения выражений, предварительно упростив их (№ 84—86):

84. $\left(\dfrac{x-2y}{x^3+y^3}+\dfrac{y}{x^2-x^2y+xy^2}\right)\cdot\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}+\dfrac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$ при $x=0{,}2$ и $y=0{,}8$.

85. $\dfrac{1}{a\,(a-b)\,(a-c)}+\dfrac{1}{b\,(b-a)\,(b-c)}+\dfrac{1}{c\,(c-a)\,(c-b)}$ при $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

86. $\left(x+y^{\frac{3}{2}}:\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ при $x=13$, $y=5$.

Глава VI. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Уравнения с одним неизвестным. Корень уравнения

Равенство двух выражений A и B

$$A=B,$$

не являющееся тождеством на множестве допустимых значений буквенных величин, входящих в это равенство, называется *уравнением*.

Множество (или область) допустимых значений уравнения (сокращенно ОДЗ), если нет специальной оговорки,— это множество числовых значений буквенных величин, входящих в выражения A и B, при которых они одновременно имеют смысл.

Следует иметь в виду, что одно и то же равенство может быть как уравнением, так и тождеством в зависимости от того, на каком множестве оно рассматривается.

Например, равенство $\sqrt{x^2}-x=0$, рассматриваемое на множестве действительных чисел,— уравнение (например, $\sqrt{(-2)^2}-$ $-(-2)=2+2\neq 0$). Но если это равенство рассматривать на множестве действительных неотрицательных чисел, то это уже не уравнение, а тождество, так как $\sqrt{x^2}=x$ при $x\geqslant 0$.

Буквенные величины, входящие в уравнение, по условию задачи могут быть неравноправными. Одни могут принимать все свои допустимые значения. Тогда их называют *известными*, или параметрами, уравнения. Другие буквенные величины называют *неизвестными*. В зависимости от числа неизвестных, входящих в уравнение, рассматривают уравнения с одним, с двумя и т. д. неизвестными.

Неизвестные величины в уравнениях обычно обозначают последними буквами латинского алфавита: x, y, z, ..., а параметры — начальными: a, b, c и т. д.

Будем сначала рассматривать уравнение с одним неизвестным x: $A(x)=B(x)$.

Определение. *Корнем* (или *решением*) уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — это значит найти все его корни. Ясно, что корень уравнения принадлежит ОДЗ уравнения.

Множество корней уравнения может быть конечным, бесконечным или пустым (уравнение не имеет ни одного корня). Например, уравнение $2x=2$ имеет единственный корень $x=1$; уравнение $\sin x=1$ имеет бесконечное множество корней $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где k — любое целое число; уравнение $x^2+1=0$ не имеет корней: для любого действительного числа x имеем $x^2+1>0$.

Определение. Два уравнения называются *равносильными* (*эквивалентными*), если всякий корень одного уравнения является

корнем другого, и наоборот. Если оба уравнения не имеют корней (решений), то они также считаются равносильными.

Иначе говоря, равносильны те и только те уравнения, множества решений которых совпадают.

Если уравнения $A=B$ и $A_1=B_1$ равносильны, то пишут

$$A=B \Leftrightarrow A_1=B_1.$$

Например, $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)=0$.

Уравнения $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2+4=0$, так как они не имеют действительных корней.

Ясно, что уравнения $x(x+1)=0$ и $(x+1)(x-1)=0$ неравносильны.

При решении уравнения путем различных преобразований стараются заменить его более простым, равносильным ему уравнением. Однако такая замена не всегда удается. Тогда возможны следующие два случая.

1. При переходе к новому уравнению может произойти потеря корней. Например, при переходе от уравнения $x(2x-1)=x^2$ к уравнению $2x-1=x$ сокращением на неизвестное x происходит потеря корня $x=0$. Поэтому при переходе к новому уравнению надо следить за тем, чтобы такая потеря не произошла.

2. Новое уравнение может содержать корни, не являющиеся корнями исходного (так называемые посторонние корни). Например, при переходе от уравнения $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-1}$ к уравнению $2x-1=x-1$ возведением в квадрат обеих частей исходного уравнения получим $x=0$ — посторонний корень исходного уравнения. Поэтому часто делают проверку корней путем подстановки их в исходное уравнение.

Напомним, что числовые равенства обладают следующими свойствами:

1) числовое равенство не нарушится, если к обеим его частям прибавить одно и то же число;

2) числовое равенство не нарушится, если обе его части умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Из свойств равенств и понятия равносильных уравнений вытекают следующие основные свойства уравнений:

1) *Уравнение $A=B$ равносильно уравнению $A+C=B+C$, где C — число или некоторое выражение, имеющее смысл на множестве допустимых значений уравнения $A=B$ (т. е. на ОДЗ уравнения $A=B$).*

Следствие. *Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.*

Например, $A=B \Leftrightarrow A-B=0$.

2) *Уравнение $A=B$ равносильно уравнению $AC=BC$, где C — число или некоторое выражение, имеющее смысл на множестве допустимых значений уравнения $A=B$ и не обращающееся на нем в нуль.*

Следствие. *Обе части уравнения можно сократить на общий множитель, не обращающийся в нуль на множестве допустимых значений данного уравнения.*

Действительно, уравнение $AC = BC \Leftrightarrow AC\left(\frac{1}{C}\right) = BC\left(\frac{1}{C}\right)$, т. е. равносильно уравнению $A = B$.

3) *Уравнение* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ *равносильно уравнению* $A_1B_2 = A_2B_1$, *рассматриваемому на множестве допустимых значений исходного уравнения* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ *или на своем множестве при дополнительном условии, что* $A_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$.

Эти свойства используются при решении уравнений.

§ 2. Линейные уравнения

Уравнением первой степени с одним неизвестным называется уравнение, в которое неизвестное входит только в первой степени и других неизвестных нет.

Используя основные свойства уравнений, заметим, что решение любого уравнения первой степени с одним неизвестным сводится к решению уравнения вида $ax = b$, где a и b — известные числа.

Определение. Уравнение $ax = b$, где $a \neq 0$, называется *линейным* уравнением.

При этом число $a \neq 0$ называется *коэффициентом* при неизвестном x, число b — *свободным членом* уравнения.

Линейное уравнение $ax = b$ всегда имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$.

В самом деле, разделив обе части уравнения на число $a \neq 0$, получим $x = \frac{b}{a}$.

Например, решим уравнение первой степени

$$3x - 5 = 10 - 2x.$$

Очевидно, что $3x - 5 = 10 - 2x \Leftrightarrow 5x = 15$; $x = 3$.

Может оказаться, что уравнение первой степени не имеет корней или имеет бесконечное множество корней.

Пример 1. Показать, что уравнение $2(x-1)+1 = 3-(1-2x)$ не имеет корней.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$2x - 2x = 2 + 1 \quad \text{или} \quad 0 \cdot x = 3.$$

Это уравнение не имеет корней, так как левая часть $0 \cdot x$ равна нулю при любом x, а значит, не равна 3.

Замечание. Если уравнение не имеет корней, т. е. множество его корней пустое, то для записи ответа используют знак $\varnothing$.

Пример 2. Решить уравнение $ax=a$.

Решение. Данное уравнение содержит параметр a (переменную, которая в условии данной задачи сохраняет одно и то же значение).

Если $a\neq 0$, то $ax=a \Leftrightarrow x=\frac{a}{a}$, т. е. $x=1$; если $a=0$, то $0\cdot x=0$, т. е. x — любое действительное число.

Пример 3. Решить уравнение $ax=x+1$.

Решение. $ax=x+1 \Leftrightarrow (a-1)x=1$.

Если $a-1\neq 0$, т. е. $a\neq 1$, то уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1}{a-1}$. Если $a-1=0$, т. е. $a=1$, то $0\cdot x=1$ — уравнение не имеет корней. Итак, если $a\neq 1$, то $x=\frac{1}{a-1}$; если $a=1$, то $\varnothing$.

§ 3. Квадратные уравнения. Теорема Виета

Определение. *Квадратным* уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где a, b, c — заданные числа, причем $a\neq 0$, а x — неизвестное.

Числа a, b, c называются *коэффициентами* квадратного уравнения: a — коэффициент при квадрате неизвестного, b — коэффициент при неизвестном в первой степени, c — свободный член.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называют *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Неполное квадратное уравнение — это уравнение одного из следующих видов:

$$\begin{array}{lll} ax^2 & =0 & (a\neq 0); \\ ax^2+c & =0 & (a\neq 0,\quad c\neq 0); \\ ax^2+bx & =0 & (a\neq 0,\quad b\neq 0). \end{array}$$

Покажем, как решаются неполные квадратные уравнения.

1. Уравнение $ax^2=0$ $(a\neq 0)$ имеет единственный корень $x=0$.

2. Уравнение $ax^2+c=0$ $(a\neq 0,\ c\neq 0)$ равносильно уравнению $x^2=-\frac{c}{a}$. Возможны два случая.

Если $\frac{c}{a}>0$, то $\left(-\frac{c}{a}\right)<0$, и поэтому уравнение $x^2=-\frac{c}{a}$ не имеет корней.

Если $\frac{c}{a}<0$, то $\left(-\frac{c}{a}\right)>0$, и уравнение $x^2=-\frac{c}{a}$ имеет два корня:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \left(-\frac{c}{a}>0\right).$$

Действительно, перенося в уравнении $x^2=-\frac{c}{a}$ величину $\left(-\frac{c}{a}\right)$ в левую часть, получаем

$$x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)=0.$$

Так как $\left(-\frac{c}{a}\right)>0$, то $\left(-\frac{c}{a}\right)=\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2$. Поэтому

$$x^2-\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2=0.$$

Разложив левую часть этого уравнения на множители, получим

$$\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Рассматривая $x-\sqrt{-\frac{c}{a}}=0$, получим $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$; рассматривая $x+\sqrt{-\frac{c}{a}}=0$, находим $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Следовательно, уравнение $ax^2+c=0$ при $\frac{c}{a}<0$ имеет два корня: $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$, что и утверждалось.

Заметим, что ответ часто записывают в виде

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\quad\left(-\frac{c}{a}>0\right).$$

3. Уравнение $ax^2+bx=0$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ можно решить с помощью разложения его левой части на множители. Очевидно, что $ax^2+bx=0\Leftrightarrow x(ax+b)=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$.

В общем случае для решения квадратных уравнений применяется метод выделения полного квадрата. Поясним этот метод на примерах.

Пример 1. Решить квадратное уравнение $x^2-4x-5=0$.

Решение. Запишем левую часть уравнения в виде

$$x^2-4x-5=(x^2-4x+4)-5-4=(x-2)^2-9.$$

Эти преобразования выполнены с целью выделения полного квадрата $(x-2)^2$.

Исходное уравнение можно записать в виде

$$(x-2)^2-9=0,$$

или $((x-2)-3)((x-2)+3)=0$. Следовательно, $x-2-3=0$ или $x-2+3=0$, откуда

$$x_1=5;\ x_2=-1.$$

Заметим, что уравнение $(x-2)^2-9=0$ или $(x-2)^2=9$ имеет корни $x_1-2=3$ и $x_2-2=-3$.

Вообще уравнение вида $x^2=a$ $(a>0)$ имеет корни $x_{1,2}=\pm\sqrt{a}$. В самом деле, $x^2=a \Leftrightarrow x^2-(\sqrt{a})^2=0$ или $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$, откуда и следует справедливость утверждения.

Пример 2. Решить квадратное уравнение $3x^2+2x-5=0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 3:

$$x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=0.$$

Применим метод выделения полного квадрата:

$$x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{5}{3}=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{9}.$$

Поэтому получим

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{9}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{9},$$

откуда $x+\frac{1}{3}=\pm\frac{4}{3}$. Следовательно,

$$x_1=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1, \quad x_2=-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}.$$

Можно выделить полный квадрат в исходном уравнении и без предварительного деления на 3 (коэффициент при квадрате неизвестного):

$$3\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)-5=3\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)-5=$$
$$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\frac{1}{9}-5=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{3}.$$

Поэтому

$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{3}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{9} \text{ и т.д.}$$

Рассмотрим квадратное уравнение общего вида

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0). \tag{1}$$

Применим метод выделения полного квадрата. Для этого запишем левую часть уравнения в следующем виде:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=$$
$$=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

Поэтому

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0 \quad \text{или} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{2}$$

Дальнейшее решение зависит от знака правой части полученного уравнения (2).

Так как $4a^2 > 0$, то знак правой части совпадает со знаком выражения $b^2 - 4ac$.

Определение. Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и обозначают буквой D:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Рассмотрим три случая: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

1. $D = b^2 - 4ac > 0$.

В этом случае уравнение (2) можно записать так:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2;$$

следовательно,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

или

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad (4)$$

где D — дискриминант уравнения (1).

Таким образом, в случае положительного дискриминанта, т. е. при $b^2 - 4ac > 0$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня, которые можно найти по формуле (3) или (4).

2. $D = b^2 - 4ac = 0$.

В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

откуда $x + \frac{b}{2a} = 0$, т. е. $x = -\frac{b}{2a}$.

Итак, если дискриминант равен нулю, т. е. $b^2 - 4ac = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Заметим, что формула (3) или, что то же, (4) применима и в случае $D = 0$. В самом деле, эта формула дает единственный корень уравнения (1). Говорят также, что в этом случае квадратное уравнение имеет два равных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Такое соглашение освобождает нас от специальных оговорок, относящихся к этому случаю при формулировке свойств квадратных уравнений, а в дальнейшем (в гл. VII) — квадратичных функций.

3. $D = b^2 - 4ac < 0$.

В этом случае в правой части уравнения (2) стоит отрицательное число, а в левой части — неотрицательное. Следовательно, если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение (2), а значит, и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеют действительных корней.

Вывод. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни только при дискриминанте $D=b^2-4ac\geqslant 0$; если $D>0$, то корни различные; если $D=0$, то корни равные. Формула корней квадратного уравнения имеет вид (3) или (4).

По этой формуле можно находить и корни неполных квадратных уравнений, но проще вычислить их путем разложения на множители, как было показано.

Замечание 1. Если коэффициент b—четное число, т. е. $b=2b_1$, то формула корней квадратного уравнения примет вид

$$x_{1,2}=\frac{-2b_1\pm\sqrt{4b_1^2-4ac}}{2a}=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-ac}}{a}.$$

Например, вычислим корни уравнения $3x^2-6x-5=0$ (заметим, что уравнение имеет действительные корни, так как $D=(-6)^2-4\cdot 3\cdot(-5)>0$):

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+15}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{24}}{3}=\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}.$$

Замечание 2. Если коэффициент $a=1$, то квадратное уравнение принимает вид $x^2+px+q=0$. Такое квадратное уравнение называется приведенным.

Всякое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ можно привести к виду $x^2+px+q=0$ делением обеих частей уравнения на $a\neq 0$.

Найдем корни приведенного квадратного уравнения. В формуле (3) полагаем $a=1$, $b=p$, $c=q$. Тогда

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Например, решим приведенное квадратное уравнение $x^2+4x-5=0$:

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-(-5)}=-2\pm\sqrt{9}=-2\pm 3,$$

откуда $x_1=1$, $x_2=-5$.

В § 5 гл. VII будет рассмотрен графический способ решения квадратного уравнения.

Теорема Виета. *Если квадратное уравнение* $ax^2+bx+c=0$ *имеет действительные корни, то их сумма равна* $\left(-\frac{b}{a}\right)$, *а произведение равно* $\frac{c}{a}$:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{5}$$

Доказательство. По условию дискриминант квадратного уравнения $D=b^2-4ac\geqslant 0$. Тогда по формуле (4) уравнение имеет два корня:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Найдем сумму и произведение корней:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{D}-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a},$$

и формулы (5) получены.

Теорема Виета устанавливает связь между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами. Для приведенного квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0$$

с дискриминантом $D=p^2-4q\geqslant 0$ формулы (5) принимают вид

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q.$$

Теорема Виета для приведенного квадратного уравнения читается так: *сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.*

Заметим, что если корни квадратного уравнения действительные, то формулы Виета позволяют по знакам коэффициентов уравнения определить знаки корней. Например, если $a>0$, $b>0$, $c<0$ (и следовательно, $D=b^2-4ac>0$), то $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$ и корни имеют разные знаки. Так как при этом $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$, то из этого следует, что больший по модулю корень отрицателен (сумма двух чисел разных знаков отрицательная!).

Пример 3. Составить приведенное квадратное уравнение, имеющее корни $x_1=2$, $x_2=3$.

Решение. По теореме Виета

$$p=-(x_1+x_2)=-5,$$
$$q=x_1x_2=6.$$

Искомое уравнение $x^2-5x+6=0$.

Пример 4. Не вычисляя корни x_1 и x_2 уравнения $3x^2-2x-6=0$, найти: а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2+x_2^2$; в) $x_1^3+x_2^3$.

Решение. Очевидно, что дискриминант $D>0$.

По теореме Виета

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2}{3},$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-2.$$

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{3}:(-2)=-\frac{1}{3}$;

б) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot(-2)=\frac{40}{9}$;

в) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=$

$=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=\frac{2}{3}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\cdot(-2)\right)=\frac{116}{27}$.

Пример 5. Найти p, если сумма квадратов корней уравнения $x^2+px-3=0$ равна 10.

Решение. По теореме Виета

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=-3.$$

Так как $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2+6$, то $p^2+6=10$, откуда $p^2=4$ и, следовательно, $p=2$, $p=-2$.

§ 4. Разложение квадратного трехчлена на множители

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0).$$

Квадратный трехчлен — это многочлен второй степени или квадратичная функция. Значения x, при которых квадратный трехчлен обращается в нуль, называются *корнями* квадратного трехчлена.

Для нахождения корней квадратного трехчлена нужно решить квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$.

Мы уже знаем, что число корней квадратного уравнения, а значит, и квадратного трехчлена зависит от знака дискриминанта

$$D=b^2-4ac.$$

Пусть дан квадратный трехчлен

$$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$$

с неотрицательным дискриминантом $D=b^2-4ac\geqslant 0$.

Теорема. *Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$, то*

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Доказательство. Так как x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ с дискриминантом $D\geqslant 0$, то по теореме Виета

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Поэтому

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=$$

$$=a((x^2-xx_1)-(x_2x-x_1x_2))=a(x(x-x_1)-x_2(x-x_1))=$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2),$$

что и требовалось доказать.

Полученное тождество

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\qquad(6)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, называется *формулой разложения квадратного трехчлена на линейные множители.*

Пример 1. Упростить выражение $\frac{2x^2-5x+2}{4-x^2}$.

Решение. Для квадратного трехчлена $y=2x^2-5x+2$ дискриминант $D=25-16>0$. Найдем корни трехчлена: $x_1=2$ и $x_2=\frac{1}{2}$. Поэтому по формуле (6) $2x^2-5x+2=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=$ $=(x-2)(2x-1)$. Следовательно,

$$\frac{2x^2-5x+2}{4-x^2}=-\frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+2)}=-\frac{2x-1}{x-2}.$$

Пример 2. Пусть $x=2$ — корень квадратного трехчлена $y=4x^2-14x+q$. Найти q и разложить трехчлен на множители.

Решение. Так как $x=2$ — корень трехчлена, то

$$4\cdot 2^2-14\cdot 2+q=0,$$

откуда $q=12$. По теореме Виета $x_1x_2=\frac{q}{4}=3$, а так как $x_1=2$, следовательно, $x_2=\frac{3}{2}$. Поэтому

$$y=4x^2-14x+12=4(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-2)(4x-6).$$

§ 5. Уравнения, приводимые к линейным и квадратным

Уравнение вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0,\ n\text{ — натуральное})$$

называется *алгебраическим уравнением n-й степени.* Его левая часть — многочлен степени n относительно x. Линейное и квадратное уравнения являются его частными случаями при $n=1$ и $n=2$ соответственно.

Уравнения, в которых неизвестное содержится под знаком корня, называются *иррациональными.*

Рассмотрим примеры решения некоторых алгебраических уравнений степени $n\geqslant 3$, а также иррациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^3+2x-3=0.$$

Решение. Используем разложение на множители:

$$x^3+2x-3=x^3+2x-2-1=(x^3-1)+2(x-1)$$

или

$$x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3).$$

Поэтому $(x-1)(x^2+x+3)=0$, откуда $x-1=0$ и $x^2+x+3=$ $=0$. Получим $x=1$; дискриминант квадратного уравнения $D=$ $=1-12<0$, следовательно, квадратное уравнение действительных корней не имеет.

Итак, $x=1$ — единственный действительный корень данного уравнения.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $x^3-8=0$; б) $x^3+8=0$.

Решение. Оба уравнения можно решить разложением левой части на множители. Проще поступить по-другому:

а) $x^3-8=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$;

б) $x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8$, но, в отличие от предыдущего, извлечь арифметический корень нельзя.

Заметим, что искомый корень уравнения может быть только отрицательным числом. Получим

$$x^3=-8 \Leftrightarrow -x^3=8 \Leftrightarrow -x=\sqrt[3]{8}=2, \quad x=-2.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)-216=0.$$

Решение. Заметим важную особенность уравнения: его левая часть содержит неизвестное x в виде выражения x^2-5x. Поэтому для решения уравнения используем метод введения нового неизвестного. Пусть $x^2-5x=y$, где y — новое неизвестное. Тогда данное уравнение приводится к квадратному уравнению относительно y:

$$y^2-30y-216=0.$$

Решив его, получим: $y_1=-6$, $y_2=36$.

Теперь найдем x. Решая уравнение

$$x^2-5x=-6 \quad \text{или} \quad x^2-5x+6=0,$$

получим $x_1=2$, $x_2=3$. Решая уравнение

$$x^2-5x=36 \quad \text{или} \quad x^2-5x-36=0,$$

получим $x_3=-4$, $x_4=9$.

Итак, $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-4$, $x_4=9$ — все корни данного уравнения.

Отметим, что без введения нового неизвестного решить данное уравнение четвертой степени было бы затруднительно.

Пример 4. Решить уравнение $x(x^2-1)(x+2)+1=0$.

Решение. Имеем

$$x(x-1)(x+1)(x+2)+1=0 \quad \text{или} \quad (x^2+x)(x^2+x-2)+1=0.$$

Полагаем $x^2+x=y$. Тогда получим

$$y(y-2)+1=0 \quad \text{или} \quad (y-1)^2=0,$$

откуда $y_1=y_2=1$. Теперь из уравнения $x^2+x=1$ или $x^2+x-1=0$ находим

$$x_{1,2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_{3,4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Пример 5. Решить уравнение $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$.

Решение. Выделяя квадрат, запишем уравнение в виде

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+2x\cdot\frac{x}{x+1}=3$$

или

$$\left(\frac{x^2+x-x}{x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{x+1}-3=0;\quad \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{x+1}-3=0.$$

Полагаем $\frac{x^2}{x+1}=y$. Тогда $y^2+2y-3=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-3$. Решая уравнение

$$\frac{x^2}{x+1}=1 \quad \text{или} \quad x^2-x-1=0,$$

получим $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Для уравнения

$$\frac{x^2}{x+1}=-3 \quad \text{или} \quad x^2+3x+3=0,$$

дискриминант $D<0$, т. е. действительных корней нет. Итак, $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ — все корни исходного уравнения.

Пример 6. Решить биквадратное уравнение

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad (a\neq 0).$$

Решение. *Биквадратное* уравнение — важный частный случай уравнения четвертой степени. Заменой $x^2=y$ биквадратное уравнение приводится к квадратному уравнению $ay^2+by+c=0$, которое имеет действительные корни только в случае, когда его дискриминант $D=b^2-4ac\geqslant 0$. Тогда возможны следующие случаи (в зависимости от корней y_1 и y_2 вспомогательного квадратного уравнения):

1) $y_1\geqslant 0$ и $y_2\geqslant 0$; биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1},\quad x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}.$$

2) $y_1\geqslant 0$, $y_2<0$; биквадратное уравнение имеет два действительных корня:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}.$$

3) $y_1<0$ и $y_2<0$; биквадратное уравнение не имеет действительных корней.

Например, решим биквадратное уравнение $x^4-8x^2-9=0$. Полагаем $x^2=y$. Тогда $y^2-8y-9=0$; дискриминант $D>0$, корни $y_1=9$, $y_2=-1$. Решая уравнение $x^2=9$, получим $x_{1,2}=\pm 3$. Уравнение $x^2=-1$ действительных корней не имеет.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{x}=x-2$.

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x=x^2-4x+4 \quad \text{или} \quad x^2-5x+4=0,$$

откуда $x_1=4$ и $x_2=1$. Выполненное преобразование может привести к появлению посторонних корней. Поэтому проверим, являются ли полученные числа решениями исходного уравнения. При подстановке числа $x=4$ в данное уравнение получаем верное равенство $\sqrt{4}=4-2$. При подстановке же числа $x=1$ получаем в левой части 1, а в правой (-1); следовательно, $x=1$ — посторонний корень. Корнем иррационального уравнения $\sqrt{x}=x-2$ является только число $x=4$.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$.

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x^2-2=x \quad \text{или} \quad x^2-x-2=0,$$

откуда $x_1=2$, $x_2=-1$. При подстановке $x=2$ в данное уравнение получаем верное равенство $\sqrt{2^2-2}=\sqrt{2}$. Следовательно, $x=2$ — корень уравнения. Число $x=-1$ не является корнем уравнения, оно не принадлежит области определения уравнения (не входит в ОДЗ уравнения).

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+5}=1$.

Решение. Так как $x^2+1<2x^2+5$ для любого действительного числа x, то $\sqrt{x^2+1}<\sqrt{2x^2+5}$, и значит, данное уравнение действительных корней не имеет.

Пример 10. Решить уравнение $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{x-1}+2$$

и возведем обе части его в квадрат:

$$3x+1=x-1+4\sqrt{x-1}+4 \quad \text{или} \quad 2\sqrt{x-1}=x-1,$$

откуда $4(x-1)=(x-1)^2$, т. е. $(x-1)(x-1-4)=0$. Следовательно, $x_1=1$, $x_2=5$. Проверка показывает, что числа $x=1$ и $x=5$ удовлетворяют исходному уравнению.

Пример 11. Решить уравнение $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$.

Решение. Будем рассматривать, как обычно, арифметические корни (или радикалы). Поэтому будем считать, что $x\geqslant 0$. Пусть $\sqrt[3]{x}=y$ $(y\geqslant 0)$. Тогда имеем $2y^2+y-3=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-3$. Если $y=1$, то $\sqrt[3]{x}=1$; $x=1$. Значение $y=-3$ непригодно.

Пример 12. Решить уравнение $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{x^2-3x+5}+(x^2-3x+5)=12.$$

Полагаем $\sqrt{x^2-3x+5}=y$ $(y\geqslant 0)$. Тогда имеем $y+y^2=12$ или $y^2+y-12=0$, откуда $y_1=3$, $y_2=-4$. Если $y=3$, то $\sqrt{x^2-3x+5}=3$ или $x^2-3x-4=0$, откуда $x_1=4$, $x_2=-1$. Значение $y=-4$ непригодно.

§ 6. Уравнения с несколькими неизвестными. Системы уравнений

Уравнение может содержать несколько неизвестных. Например, $x+2y=3$ — уравнение с двумя неизвестными, $x^2+y^2=z^2$ — уравнение с тремя неизвестными и т. д.

Решением уравнения с двумя, тремя и т. д. неизвестными будем называть упорядоченную пару, тройку и т. д. значений неизвестных, обращающих это уравнение в верное равенство.

Например, решениями уравнения $x+2y=3$ являются пары $\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$, (3; 0), (1; 1) и другие. Вообще, придавая x произвольное значение, можно найти соответствующее значение y. Общий вид решения этого уравнения $\left(x;\ \frac{3-x}{2}\right)$.

Решениями уравнения $x^2+y^2=z^2$ являются тройки чисел (0; 1; 1), (0; 1; —1), (3; 4; 5) и другие. Их также бесконечное множество. Общий вид решения этого уравнения $(x;\ y;\ \pm\sqrt{x^2+y^2})$.

Уравнение $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=0$ имеет единственное действительное решение (0; 1; —1). В самом деле, сумма квадратов действительных чисел равна нулю в том и только в том случае, когда каждое из них равно нулю, т. е. в нашем примере при $x=0$, $y-1=0$ и $z+1=0$.

Уравнение $x^2+y^2+1=0$ действительных решений не имеет.

Уравнения с несколькими неизвестными имеют те же свойства, какие имеют уравнения с одним неизвестным.

Пусть заданы несколько уравнений с одним, двумя, тремя или бóльшим числом неизвестных.

Если требуется найти число, пару чисел, тройку чисел и т. д., являющихся решением всех данных уравнений, то совокупность (или множество) этих уравнений называют *системой уравнений*.

Например,

$$\begin{cases} x-1=0, \\ x^2+x-2=0 \end{cases}$$

— система двух уравнений с одним неизвестным. Число $x=1$, удовлетворяющее обоим уравнениям системы, является решением системы.

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0 \end{cases}$$

— система двух уравнений с двумя неизвестными. Пара чисел $x=1$ и $y=1$, удовлетворяющих уравнениям системы, является решением системы.

Число уравнений в системе не обязательно равно числу неизвестных. Например, можно рассматривать систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x+y=z, \\ 2x-y=2z. \end{cases}$$

Решением этой системы является тройка чисел $(x; y; z)$, обращающая каждое уравнение системы в верное числовое равенство. Например, (1; 0; 1)—решение системы; (1; 2; 3) не является решением системы.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если любое решение одной системы является решением другой, и наоборот. Если обе системы уравнений не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Если система не имеет решений, то говорят, что она противоречивая, или несовместная. Решить систему—это значит найти множество всех ее решений.

§ 7. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2—заданные числа, а x и y—неизвестные.

Решением системы уравнений называются такие два числа x и y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство. Решить систему уравнений — это значит найти все ее решения.

Рассмотрим способы решения системы.

Способ подстановки. Этот способ заключается в следующем:

1) из одного уравнения системы нужно выразить одно неизвестное через другое, например y выразить через x;

2) найденное выражение подставить в другое уравнение системы; получится одно уравнение с одним неизвестным x;

3) решив это уравнение, найти значение x;

4) подставив полученное значение x в выражение для y, найти значение y.

Решим способом подстановки систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+5y=15, \\ 3x+8y=-1. \end{cases}$$

1) Из первого уравнения находим

$$y=\frac{15-2x}{5};$$

2) подставим выражение для y во второе уравнение системы

$$3x+\frac{8}{5}(15-2x)=-1;$$

3) решаем это уравнение:

$$15x+120-16x=-5, \quad x=125;$$

4) подставляя $x=125$ в выражение для y, получим

$$y=\frac{15-2\cdot 125}{5}=-47.$$

Ответ. $x=125$, $y=-47$.

Способ алгебраического сложения. Этот способ состоит в следующем:

1) сначала нужно уравнять модули коэффициентов при каком-нибудь неизвестном;

2) складывая или вычитая почленно полученные уравнения, найти одно неизвестное;

3) подставляя найденное значение в одно из уравнений системы, найти второе неизвестное.

Этот способ оказывается удобным в тех случаях, когда у обоих уравнений коэффициенты при каком-нибудь неизвестном одинаковы или отличаются только знаком.

Решим способом алгебраического сложения систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+5y=15, \\ 4x+3y=-5. \end{cases}$$

1) Оставляя второе уравнение без изменения, умножим первое уравнение на 2:

$$\begin{cases} 4x+10y=30, \\ 4x+3y=-5. \end{cases}$$

2) Вычитая из первого уравнения полученной системы второе уравнение, находим

$$7y=35,\ y=5.$$

3) Подставляя $y=5$ в первое уравнение исходной системы, получим

$$2x+5\cdot 5=15,\ x=-5.$$

Ответ. $x=-5$, $y=5$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 5x+y=7, \\ 2x-3y=-4. \end{cases}$$

Решение. а) Способ подстановки. Из первого уравнения находим $y=7-5x$ и подставляем это выражение во второе уравнение системы:

$$2x-3(7-5x)=-4,\ \text{откуда}\ x=1.$$

Поэтому $y=7-5\cdot 1=2$. Система имеет решение (1; 2) (оно записано в виде упорядоченной пары чисел).

б) Способ алгебраического сложения. Уравняем модули коэффициентов при y. Оставим второе уравнение без изменения и умножим первое уравнение системы на 3:

$$\begin{cases} 15x+3y=21, \\ 2x-3y=-4. \end{cases}$$

Складывая почленно эти уравнения, находим

$$17x=17, \text{ откуда } x=1.$$

Тогда из первого уравнения данной системы имеем

$$5\cdot 1+y=7, \text{ откуда } y=2.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 4x-2y=2. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим $y=2x-1$. Подставляя во второе уравнение, имеем

$$4x-2(2x-1)=2 \quad \text{или} \quad 2=2.$$

Полученное тождество означает, что система имеет бесконечное множество решений, определяемых по формуле $y=2x-1$, где x — любое число.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 6x+9y=2. \end{cases}$$

Решение. Применяя способ алгебраического сложения, уравняем коэффициенты при x:

$$\begin{cases} 6x+9y=12, \\ 6x+9y=2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения полученной системы второе уравнение, приходим к неверному равенству $0=10$. Полученное противоречие означает, что исходная система несовместна, т. е. она не имеет решений.

В § 5 гл. VII будет рассмотрен графический способ решения систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

§ 8. Уравнения и системы уравнений (решение задач)

При решении уравнений или систем уравнений нужно следить за равносильностью выполняемых преобразований.

Если уравнение или система уравнений содержит параметр, то надо исследовать решение: в зависимости от значений параметра уравнение (система уравнений) может иметь одно или несколько решений, а может и не иметь решений.

При решении уравнений или систем уравнений часто используется введение нового неизвестного.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

Решение. При $a^2-b^2\neq 0$

$$(a-b)(ax-b)+(a+b)(bx+a)=a^2+b^2,$$

откуда после упрощений находим $(a^2+b^2)x=0$.

Поэтому при $a^2-b^2\neq 0$ получим $x=0$ — корень уравнения. Если $a^2-b^2=0$, то уравнение теряет смысл.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}.$$

Решение. Разложив знаменатели на множители, получим

$$\frac{2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}.$$

После приведения к общему знаменателю $x(x^2-4)$ и приведения подобных членов получим уравнение $x^2-5x+6=0$, равносильное исходному, при условии, что $x(x^2-4)\neq 0$, т. е. $x\neq 0$, $x\neq\pm 2$. Корни квадратного уравнения $x_1=3$, $x_2=2$. Так как $x_2=2$ не удовлетворяет ограничению $x\neq 2$, то, следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=3$.

Пример 3. Решить уравнение

$$(a^2+a-2)x^2+(2a^2+a+3)x+a^2-1=0.$$

Решение. Пусть сначала $a^2+a-2\neq 0$, т. е. $a\neq 1$, $a\neq -2$. Тогда имеем квадратное уравнение с дискриминантом $D=(2a^2+a+3)^2-4(a^2+a-2)(a^2-1)=4a^4+a^2+9+4a^3+12a^2+6a-4(a^4-a^2+a^3-a-2a^2+2)=25a^2+10a+1=(5a+1)^2$. Так как $D\geqslant 0$, то находим корни:

$$x_1=\frac{-(2a^2+a+3)+(5a+1)}{2(a^2+a-2)}=\frac{-2(a-1)^2}{2(a-1)(a+2)}=-\frac{a-1}{a+2};$$

$$x_2=\frac{-(2a^2+a+3)-(5a+1)}{2(a^2+a-2)}=\frac{-2(a+2)(a+1)}{2(a-1)(a+2)}=-\frac{a+1}{a-1},$$

разложив на множители квадратные трехчлены

$$a^2+a-2=(a-1)(a+2),\ a^2+3a+2=(a+2)(a+1).$$

При $a=1$ исходное уравнение принимает вид

$$6x=0 \text{ или } x=0;$$

при $a=-2$ исходное уравнение имеет вид

$$9x+3=0 \text{ или } x=-\frac{1}{3}.$$

Ответ. Если $a \neq 1$ и $a \neq -2$, то $x_1 = -\frac{a-1}{a+2}$, $x_2 = -\frac{a+1}{a-1}$; если $a = 1$, то $x = 0$; если $a = -2$, то $x = -\frac{1}{3}$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$.

Решение. Имеем $x + a \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Заметим, что при $a < 0$ уравнение корней не имеет: его левая часть неотрицательна (т. е. больше или равна нулю), а правая часть отрицательна. При $a = 0$ уравнение принимает вид $\sqrt{x} = -\sqrt{x}$, откуда $x = 0$.

Рассмотрим случай $a > 0$. Возведем в квадрат обе части уравнения $x + a = a^2 - 2a\sqrt{x} + x$, откуда после сокращения на $a \neq 0$ получим $2\sqrt{x} = a - 1$ или $x = \frac{(a-1)^2}{4}$. Проверка показывает, что $x = \frac{(a-1)^2}{4}$ является корнем уравнения при $a \geqslant 1$.

Ответ. Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \geqslant 1$, то $x = \frac{(a-1)^2}{4}$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax - 3ay = 2a + 3. \end{cases}$$

Решение. Применим способ подстановки: $x = 1 - ay$. Тогда $a(1 - ay) - 3ay = 2a + 3$ или $a(a+3)y = -(a+3)$.

Если $a \neq 0$ и $a \neq -3$, то $y = -\frac{1}{a}$; $x = 1 - a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = 2$.

Если $a = 0$, то $0 \cdot y = -3$, и система несовместна.

Если $a = -3$, то $0 \cdot y = 0$, т. е. y — любое число, а $x = 1 + 3y$.

Ответ. Если $a \neq 0$, $a \neq -3$, то система имеет единственное решение $\left(2; -\frac{1}{a}\right)$; если $a = 0$, то система не имеет решений; если $a = -3$, то система имеет бесконечное множество решений, определяемое формулой $x = 1 + 3y$, где y — любое.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2(x+y) = 15, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x + y = u$. Тогда первое уравнение системы примет вид $u^2 - 2u - 15 = 0$, откуда $u_1 = 5$, $u_2 = -3$. Исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 6. \end{cases}$$

В каждой из этих систем можно применить способ подстановки. Например, для первой системы найдем из первого уравнения $y = 5 - x$ и подставим во второе уравнение: $x(5 - x) = 6$.

Поступим иначе. Будем рассматривать x и y как корни приведенного квадратного уравнения

$$z^2 + pz + q = 0.$$

По теореме Виета $p=-(x+y)$, $q=xy$.

Для системы

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases}$$

имеем $z^2-5z+6=0$, откуда $z_1=3$, $z_2=2$. Следовательно, $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=3$.

Для системы

$$\begin{cases} x+y=-3, \\ xy=6 \end{cases}$$

имеем $z^2+3z+6=0$ с дискриминантом $D=9-4\cdot 6<0$ и, значит, это уравнение, следовательно, и система решений не имеют.

Ответ. (3; 2), (2; 3).

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2-3=0, \\ x^2+2xy-2y^2-6=0. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6 \end{cases}$$

и выполним деление

$$\frac{2x^2-3xy+y^2}{x^2+2xy-2y^2}=\frac{3}{6}.$$

Полагаем $\frac{y}{x}=t$ или $y=xt$, где t — новое неизвестное. Получим

$$\frac{x^2(2-3t+t^2)}{x^2(1+2t-2t^2)}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$4-6t+2t^2=1+2t-2t^2 \text{ или } 4t^2-8t+3=0.$$

Решая это уравнение, находим $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=\frac{1}{2}$.

Если $t=\frac{3}{2}$, то $y=\frac{3}{2}x$. Подставив в первое уравнение исходной системы, получим уравнение

$$2x^2-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{4}x^2-3=0 \text{ или } x^2+12=0,$$

которое не имеет действительных корней.

Если $t=\frac{1}{2}$, то $y=\frac{1}{2}x$. После подстановки в первое уравнение системы, получим $2x^2-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^2-3=0$ или $x^2-4=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=-2$; следовательно, $y_1=1$, $y_2=-1$.

Ответ. (2; 1), (−2; −1).

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$. Тогда получим

$$\begin{cases} u+v=\frac{3}{2}, \\ u^2+v^2=\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $v=\frac{3}{2}-u$ и подставим во второе уравнение:

$$u^2+\left(\frac{3}{2}-u\right)^2=\frac{5}{4} \text{ или } 2u^2-3u+1=0,$$

откуда $u_1=1$, $u_2=\frac{1}{2}$, следовательно, $v_1=\frac{1}{2}$, $v_2=1$. Поэтому $x_1=1$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=1$.

Ответ. (1; 2), (2; 1).

§ 9. Задачи на составление уравнений

Для решения таких задач надо ввести неизвестные и выразить условия задачи соответствующими уравнениями. При этом большое значение имеет удачный выбор неизвестных и эффективность способа решения.

В отдельных задачах число уравнений может оказаться меньше числа неизвестных, входящих в них, но эти уравнения таковы, что позволяют получить ответ на поставленный вопрос.

Пример 1. Двузначное число в 4 раза больше суммы и в 3 раза больше произведения своих цифр. Найти это число.

Решение. Пусть x—число десятков, y—число единиц искомого числа. Тогда само число будет равно $10x+y$. Согласно условию имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 10x+y=4(x+y), \\ 10x+y=3xy. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим y через x: $y=2x$ и подставим во второе уравнение системы

$$10x+2x=6x^2,$$

откуда $x=2$ (значение $x=0$ не удовлетворяет условию задачи); тогда $y=4$. Искомое число равно 24.

Пример 2. Велосипедист проезжает расстояние от A до B за 3 ч. Чтобы проехать за то же время расстояние от A до C,

он должен проезжать каждый километр на 1 мин быстрее, так как расстояние от A до C на 30 км больше расстояния от A до B. Найти расстояние от A до B.

Решение. Обозначим скорость велосипедиста через x км/ч. Тогда расстояние от A до B будет равно $3x$ км, а от A до C — $(3x+30)$ км.

Так как велосипедист проезжает x км за час или 60 мин, то он затрачивает на 1 км $\frac{60}{x}$ мин. Новая скорость велосипедиста при движении от A до C будет равна $\frac{3x+30}{3}=(x+10)$ км/час, следовательно, $\frac{60}{x+10}$ мин — затрата времени на 1 км. По условию задачи

$$\frac{60}{x+10}=\frac{60}{x}-1.$$

После упрощений получим $x^2+10x-600=0$, откуда $x=20$ км/ч (второй корень уравнения отрицательный и непригоден). Искомое расстояние равно 60 км.

Пример 3. Из A в B по течению пароход идет два дня, обратно — три дня. Определить, сколько дней будет плыть плот из A в B, если скорость плота равна скорости течения.

Решение. Пусть S — расстояние от A до B, x — собственная скорость парохода, y — скорость плота. Требуется определить $\frac{S}{y}$ — время, за которое плот будет плыть из A в B.

По условию задачи

$$\begin{cases} S=2(x+y), \\ S=3(x-y). \end{cases}$$

Поэтому

$$3(x-y)=2(x+y) \text{ или } x=5y.$$

Отсюда $S=2(x+y)=12y$. Следовательно, искомое время $\frac{S}{y}=12$ дней.

Пример 4. В бассейн проведены три трубы. Первые две, действуя совместно, наполняют бассейн за то же время, за которое наполняет бассейн одна третья труба. При этом вторая труба, действуя одна, наполняет бассейн на 5 ч быстрее первой трубы и на 4 ч медленнее третьей. За какое время наполняет бассейн каждая труба отдельно?

Решение. Пусть V — объем бассейна; x ч — время наполнения бассейна второй трубой. Тогда $(x+5)$ ч — время наполнения первой трубой, а $(x-4)$ ч — третьей трубой. Производительности каждой из труб соответственно равны $\frac{V}{x+5}$, $\frac{V}{x}$, $\frac{V}{x-4}$.

По условию

$$\frac{V}{x+5}+\frac{V}{x}=\frac{V}{x-4},$$

откуда, сокращая на V, получим квадратное уравнение: $x^2 - 8x - 20 = 0$. Решая его, находим $x = 10$ ($x = -2$ не годится).

Ответ. 15 ч; 10 ч; 6 ч.

Пример 5. Два рабочих могут выполнить некоторую работу за 6 ч. Если бы один первый выполнил 60% всей работы, а затем один второй — оставшуюся часть, то они затратили бы 12 ч. Сколько времени нужно каждому для того, чтобы выполнить эту работу одному?

Решение. Пусть a — величина работы; x ч — время, за которое первый рабочий может выполнить эту работу; y ч — время, за которое второй рабочий может выполнить всю работу. Тогда $\frac{a}{x}$ — производительность первого, $\frac{a}{y}$ — производительность второго рабочего.

По условию

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{x}+\frac{a}{y}\right)\cdot 6 = a, \\ 0{,}6x + 0{,}4y = 12 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ 3x + 2y = 60. \end{cases}$$

Решим полученную систему способом подстановки. Из второго уравнения системы выразим y через x:

$$y = \frac{60 - 3x}{2}.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы, находим

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{3(20-x)} = \frac{1}{6}$$

или после упрощений $x^2 - 22x + 120 = 0$, откуда $x_1 = 12$, $x_2 = 10$. Следовательно, $y_1 = 12$, $y_2 = 15$. Задача допускает два ответа: 12 ч и 12 ч, 10 ч и 15 ч.

Пример 6. Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригады обработали древесины в два раза больше, чем вторая, а вторая и третья — в три раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом соревновании?

Решение. Пусть x, y, z — количество древесины, обработанное соответственно первой, второй и третьей бригадами.

По условию

$$\begin{cases} x + z = 2y, \\ y + z = 3x. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$x - y = 2y - 3x \quad \text{или} \quad 4x = 3y.$$

Отсюда $y = \frac{4}{3}x > x$. Значит, победила вторая или третья бригада. Подставляя $y = \frac{4}{3}x$ в первое уравнение системы,

находим:

$$x+z=\frac{8}{3}x \quad \text{или} \quad z=\frac{5}{3}x.$$

Сравним $y=\frac{4}{3}x$ и $z=\frac{5}{3}x$. Заключаем, что $z>y$. Победила третья бригада.

§ 10. Неравенства и их свойства

Определение. Два действительных числа или два алгебраических выражения, соединенные знаком $>$ (больше) или $<$ (меньше) (а также знаком $\geqslant$ или $\leqslant$), образуют *неравенство*

$$A>B, \quad A<B, \quad A\geqslant B, \quad A\leqslant B.$$

Неравенство состоит из двух частей: левой части A и правой части B.

Если в неравенстве содержится знак $>$ или $<$, то оно называется *строгим*. Неравенство, содержащее знак $\geqslant$ или $\leqslant$, называется *нестрогим*.

В неравенствах выражения A и B рассматриваются на том множестве, где A и B одновременно имеют смысл. Это множество называется *множеством* (или областью) *допустимых значений* неравенства (сокращенно ОДЗ).

При конкретных значениях буквенных величин из множества допустимых значений неравенство обращается в числовое неравенство, которое может быть верным (справедливым) или неверным (несправедливым).

Два или несколько неравенств называются *неравенствами одинакового смысла* или *знака*, если они содержат один и тот же знак $>$ или $<$. Два неравенства называются неравенствами *противоположного смысла* или *знака*, если в одном из них стоит знак $>$, а в другом знак $<$. Например, неравенства $A>B$ и $C>D$ имеют одинаковый смысл, а неравенства $A<B$ и $C>D$ — противоположный смысл.

Пусть a и b — действительные числа.

Определение. Неравенство $a>b$ означает, что разность $a-b$ положительна.

Определение. Неравенство $a<b$ означает, что разность $a-b$ отрицательна.

Для любых двух действительных чисел a и b только одно из следующих соотношений является верным: $a=b$, $a>b$, $a<b$.

Приведем определения нестрогих неравенств $a\geqslant b$ и $a\leqslant b$.

Неравенство $a\geqslant b$ означает, что $a>b$ или $a=b$, т. е. a не меньше b.

Неравенство $a\leqslant b$ означает, что $a<b$ или $a=b$, т. е. a не больше b.

Например, $15\geqslant 11$, $7\geqslant 7$, $3\leqslant 5$, $4\leqslant 4$.

Рассматриваются также двойные неравенства:

$$a<b<c, \quad a\leqslant b\leqslant c, \quad a<b\leqslant c, \quad a\leqslant b<c.$$

Например, двойное неравенство $a<b<c$ означает, что одновременно $a<b$ и $b<c$; двойное неравенство $a\leqslant b<c$ означает, что одновременно $a\leqslant b$ и $b<c$ и т. д.

Свойства числовых неравенств.

1) *Если* $a>b$, *то* $b<a$, *и наоборот, если* $b<a$, *то* $a>b$.

Доказательство. Если $a>b$, то разность $a-b$ — положительное число. Тогда $b-a$ — отрицательное число, т. е. $b<a$.

Наоборот, если $b<a$, то $b-a<0$, и значит, $a-b>0$, т. е. $a>b$.

2) *Если* $a>b$ *и* $b>c$, *то* $a>c$.

Доказательство. Рассмотрим разность $a-c=(a-b)+(b-c)$. По условию $a-b>0$ и $b-c>0$. Следовательно, $a-c>0$, т. е. $a>c$, что и требовалось доказать.

3) *Если* $a>b$, *то при любом* c $a+c>b+c$, *т. е. неравенство остается справедливым, если к обеим его частям прибавить одно и то же число.*

Доказательство. Рассмотрим разность

$$(a+c)-(b+c)=(a-b)+(c-c)=a-b.$$

По условию $a>b$, и значит, $a-b>0$. Следовательно, $(a+c)-(b+c)>0$, т. е. $a+c>b+c$.

Следствие. *Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом знак переносимого числа на противоположный.*

В самом деле, пусть $a+b>c$. Прибавляя к обеим частям неравенства число $(-b)$, получим

$$a>c-b,$$

т. е. число b перенесено из левой части неравенства в правую с противоположным знаком.

4) *Если* $a>b$ *и* $c>0$, *то* $ac>bc$; *если* $a>b$ *и* $c<0$, *то* $ac<bc$, *т. е. при умножении обеих частей неравенства на одно и то же положительное число знак неравенства не изменится; при умножении обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число знак неравенства изменится на противоположный.*

Доказательство. Пусть $a>b$ и $c>0$. Докажем, что $ac>bc$. Рассмотрим разность $ac-bc=(a-b)c$. Так как $a-b>0$ и $c>0$, то $ac-bc=(a-b)c>0$. Следовательно, $ac>bc$. Аналогично, если $a>b$ и $c<0$, то $ac-bc=(a-b)c<0$. Следовательно, $ac<bc$.

5) *Если* $a>b$ *и* $c>d$, *то* $a+c>b+d$; *если* $a>b$ *и* $c<d$, *то* $a-c>b-d$, *т. е. два неравенства одинакового знака можно почленно складывать; два неравенства противоположного знака можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого вычитали другое неравенство.*

Доказательство. Пусть $a>b$ и $c>d$. Докажем, что $a+c>b+d$. Запишем разность $(a+c)-(b+d)$ в виде $(a-b)+(c-d)$. Так как $a-b>0$ и $c-d>0$, то $(a+c)-(b+d)>0$, и, значит, $a+c>b+d$.

Пусть

$$a > b \quad \text{и} \quad c < d.$$

Тогда $d > c$ и $d - c > 0$. Поэтому разность

$$(a-c)-(b-d)=(a-b)+(d-c)>0,$$

т. е.

$$a-c>b-d.$$

Свойство доказано.

6) *Если a, b, c, d — положительные числа и $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$*, т. е. *неравенства одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, можно почленно умножать; при этом получается неравенство того же знака.*

Доказательство. Имеем

$$ac-bd=(ac-bc)+(bc-bd)=(a-b)c+(c-d)b,$$

где $a-b>0$, $c>0$, $c-d>0$, $b>0$. Отсюда $ac-bd>0$ или $ac>bd$, что и утверждалось.

7) *Если a и b — положительные числа и $a > b$, то при любом натуральном n выполняется неравенство $a^n > b^n$.*

8) *Если a и b — положительные числа и $a > b$, то при любом натуральном $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.*

Свойства 1—8 справедливы и для нестрогих неравенств. Это следует из справедливости свойств 1—8 для строгих неравенств и известных свойств равенств.

Например, если $a \geqslant b$, то $b \leqslant a$, и наоборот, если $b \leqslant a$, то $a \geqslant b$. В самом деле, утверждение справедливо для строгих неравенств. Кроме того, известно, что аналогичное утверждение справедливо и для равенств, т. е. если $a=b$, то $b=a$, и наоборот, если $b=a$, то $a=b$.

Свойства 1—8, установленные для числовых неравенств, сохраняются и для любых неравенств вида

$$A > B, \quad A < B, \quad A \geqslant B, \quad A \leqslant B,$$

где A и B — любые математические выражения.

Определение. Два неравенства называются *равносильными*, если из справедливости одного из них следует справедливость другого, и наоборот. Равносильность неравенств обозначается так же, как и равносильность уравнений, т. е. с помощью знака $\Leftrightarrow$.

Свойства 3 и 4 выражают равносильность неравенств

$$A > B \quad \text{и} \quad A + C > B + C$$
$$A > B \quad \text{и} \quad AC > BC \quad (C > 0),$$

где выражения A, B и C рассматриваются в общей части множеств их допустимых значений.

Рассмотренные свойства неравенств используются при доказательстве неравенств и при решении многих задач.

§ 11. Доказательство неравенств

Укажем некоторые способы доказательств неравенств.

Рассмотрим сначала некоторые основные неравенства.

1) $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ или $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab$, причем равенство достигается лишь при $a=b$. В самом деле, разность $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$. Очевидно, что $(a-b)^2 \geqslant 0$, и, значит, $a^2+b^2 \geqslant 2ab$.

2) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, причем равенство достигается лишь в случае, когда числа a и b имеют одинаковые знаки или хотя бы одно из них равно нулю. Это неравенство обобщается на любое конечное число слагаемых:

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

3) $|a-b| \geqslant |a|-|b|$.

4) $ax^2+bx+c \geqslant 0$, если $a>0$ и $D=b^2-4ac \leqslant 0$. Равенство достигается лишь в случае, когда $D=0$ и $x=-b/2a$ (доказательство см. в § 12 гл. VI).

5) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, причем равенство достигается лишь при $a=b$.

Число $\frac{a+b}{2}$ называется *средним арифметическим* чисел a и b, а число $\sqrt{ab}$ — их *средним геометрическим*.

Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. Для доказательства запишем очевидное неравенство $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

Возведя в квадрат, получим

$$a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

что и требовалось доказать. При этом равенство достигается только тогда, когда оно достигается в исходном неравенстве, т. е. при $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0$, что возможно только при $a=b$.

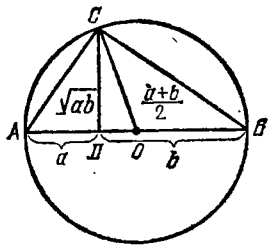


Рис. 10.

Приведем также геометрическое доказательство этого неравенства. Мы знаем, что в прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной из вершины прямого угла, равна половине длины гипотенузы, а длина высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, равна среднему геометрическому длин отрезков, на которые она делит гипотенузу. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 10) длина медианы $|OC|=\frac{a+b}{2}$, длина высота $|CD|=\sqrt{ab}$; очевидно, что при $a \neq b$, $|OC|>|CD|$, при $a=b$, $|OC|=|CD|$.

Понятия среднего арифметического и среднего геометрического вводятся и для n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; это числа $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ и $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$; в этом общем случае справедливо неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

причем равенство достигается лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

6) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, если $a>0$, $b>0$, причем равенство достигается лишь при $a=b$. В самом деле, числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ положительны. Поэтому среднее арифметическое чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$$

(равенство в случае $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, т. е. при $a=b$, так как a и b положительны).

Можно доказать иначе

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\geqslant 0,$$

так как $a>0$, $b>0$. Значит, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

7) $a^3+b^3\geqslant ab(a+b)$, если $a>0$, $b>0$, причем равенство достигается лишь при $a=b$.

В самом деле, $a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2\geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству более сложных неравенств. Способы их доказательства состоят в следующем.

1. Доказываемое неравенство путем преобразований, основанных на свойствах неравенств и сохраняющих их равносильность, сводят к неравенству, справедливость которого известна.

2. Путем равносильных преобразований очевидное или известное неравенство сводят к доказываемому неравенству.

3. Комбинируют первый и второй способы, т. е. преобразуют как известное, так и доказываемое неравенства.

Применение этих способов покажем на следующих примерах.

Пример 1. Доказать, что $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

Решение. 1-й способ. Доказываемое неравенство равносильно неравенству $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\geqslant 0$ или $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geqslant 0$. Последнее очевидно. Равенство достигается только при $a=b=c$.

2-й способ. Складывая три известных неравенства

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab, \quad \frac{b^2+c^2}{2} \geqslant bc, \quad \frac{a^2+c^2}{2} \geqslant ac,$$

получаем $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$.

Пример 2. Доказать, что $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

Решение. Умножая неравенства

$$(a+b) \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad (b+c) \geqslant 2\sqrt{bc}, \quad (a+c) \geqslant 2\sqrt{ac},$$

получаем

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc,$$

так как $\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ac} = abc$.

Пример 3. Доказать, что при любых значениях x верны неравенства: а) $x^2-2x+2>0$; б) $2x^2+3x+5>0$.

Решение. Используем приведенное выше неравенство 4) для квадратного трехчлена: у данных квадратных трехчленов коэффициенты при квадрате x положительны, а дискриминанты отрицательны; например, для трехчлена $2x^2+3x+5$ дискриминант $D=9-40<0$. Неравенства доказаны. Заметим, что $x^2-2x+2=(x-2)^2+1$, откуда ясно, что $x^2-2x+2>0$ для любого значения x.

Пример 4. Доказать, что для любых x и y

$$x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0.$$

Решение. Рассматривая левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно x, имеем

$$x^2+2(1-2y)x+(5y^2-6y+3)>0.$$

Так как дискриминант

$$D=4(1-2y)^2-4(5y^2-6y+3)=$$
$$=-4(y^2-2y+2)=-4((y-1)^2+1)<0$$

для любых y, а коэффициент при x^2 положителен, то квадратный трехчлен $x^2+2(1-2y)x+(5y^2-6y+3)$ положителен для всех x и y, что и требовалось доказать.

Пример 5. Доказать, что для любых чисел a_1, a_2, b_1, b_2, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} a_1^2+a_2^2=1, \\ b_1^2+b_2^2=1, \end{cases}$$

справедливо неравенство $|a_1b_1+a_2b_2| \leqslant 1$.

Решение. Используем приведенные выше неравенства 2) и 1). Имеем

$$|a_1b_1+a_2b_2| \leqslant |a_1b_1|+|a_2b_2| \leqslant \frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}.$$

Так как

$$\frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}=\frac{a_1^2+a_2^2}{2}+\frac{b_1^2+b_2^2}{2}=1,$$

то $|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant 1$, что и требовалось доказать.

При доказательстве некоторых неравенств удобно использовать замену данных величин другими.

Пример 6. Доказать, что

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

если $a>0$, $b>0$.

Решение. Полагая $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$, получаем неравенство

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^2}{x}\geqslant x+y \quad (x>0, \quad y>0),$$

равносильное простейшему $x^3+y^3\geqslant xy(x+y)$. Неравенство доказано.

Пример 7. Доказать, что для любых чисел a и b, удовлетворяющих условию $a+b=2$, справедливо неравенство

$$a^4+b^4\geqslant 2.$$

Решение. Пусть $a=1+c$. Тогда $b=2-a=1-c$. Поэтому

$$a^4+b^4=(1+c)^4+(1-c)^4=((1+c)^2)^2+((1-c)^2)^2=$$
$$=(1+2c+c^2)^2+(1-2c+c^2)^2$$

или

$$a^4+b^4=(1+4c^2+4c+2c^2+4c^3)+$$
$$+(1+4c^2+c^4-4c+2c^2-4c^3)=2+12c^2+2c^4\geqslant 2,$$

что и требовалось доказать.

§ 42. Решение линейных и квадратных неравенств с одним неизвестным

Будем рассматривать неравенства с одним неизвестным.

Определение. *Решением неравенства* называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — это значит найти все значения неизвестного, при которых данное неравенство является верным (или установить, что таких значений неизвестного нет).

Два неравенства называются *равносильными*, если всякое решение одного из них является решением другого, и наоборот. Если оба неравенства не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Решая неравенство, заменяют данное неравенство другим, более простым, но равносильным данному. При этом используются основные свойства неравенств:

1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком; при этом знак неравенства не меняется.

2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю; если это число положительно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный.

Линейные неравенства. *Линейным* неравенством называется неравенство вида

$$ax+b \vee 0 \quad (a \neq 0),$$

где символ $\vee$ может обозначать любой из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$. Для определенности разберем решение неравенства

$$ax+b>0 \quad (a \neq 0).$$

Это неравенство запишем в виде $ax>-b$. Отсюда получаем $x>-\frac{b}{a}$, если $a>0$, и $x<-\frac{b}{a}$, если $a<0$.

Другая запись: если $a>0$, то $ax+b \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$; если $a<0$, то $ax+b \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$.

Например, решим неравенство

$$2(x-3)-1>3(x-2)-4(x+1).$$

Упростим обе части неравенства: раскроем скобки и приведем подобные члены. Получим

$$2x-6-1>3x-6-4x-4,$$
$$2x-7>-x-10,$$

откуда

$$3x>-3,$$

т. е. $x>-1$ — решение линейного неравенства. Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x>-1$, на числовой оси изображается лучом $(-1;\ +\infty)$ (см. гл. I).

В рассмотренном примере после упрощения неравенства получили линейное неравенство, в котором коэффициент при неизвестном не равен нулю. Для других неравенств первой степени с одним неизвестным этот коэффициент может оказаться равным нулю. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить неравенство

$$2(x-1)+1>3-(1-2x).$$

Решение. Упрощая неравенство, получим

$$2x-2+1>3-1+2x,$$
$$2x-2x>2+1 \quad \text{или} \quad 0 \cdot x>3.$$

А это неравенство не имеет решений, так как его левая часть $0 \cdot x$ равна нулю при любом x, а неравенство $0>3$ неверно.

В случае неравенства $2(x-1)+1<3-(1-2x)$ имели бы $0\cdot x<3$ или $0<3$, следовательно, любое значение x является решением неравенства.

Пример 2. Решить неравенство $ax>a$.

Решение. Данное неравенство содержит параметр a. Если $a>0$, то $ax>a \Leftrightarrow x>1$; если $a<0$, то $ax>a \Leftrightarrow x<1$; если $a=0$, то решений нет.

Квадратные неравенства. *Квадратным неравенством* называется неравенство вида

$$ax^2+bx+c \vee 0 \quad (a\neq 0),$$

где символ $\vee$ может обозначать любой из знаков $>, <, \geqslant, \leqslant$. Другими словами, квадратное неравенство — это неравенство, в левой части которого стоит квадратный трехчлен, а в правой — нуль.

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0).$$

Вынося a за скобки и выделяя полный квадрат, запишем квадратный трехчлен в виде

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

или

$$y=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right), \qquad (7)$$

где $D=b^2-4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена.

Возможны следующие случаи:

1. $D<0$. Так как $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$ для любого x, а $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)>0$ при $D<0$, выражение в скобках (7) положительно, и следовательно:

1) если $a>0$, то $ax^2+bx+c>0$ для всех x;

2) если $a<0$, то $ax^2+bx+c<0$ для всех x.

Таким образом, если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то для всех x квадратный трехчлен принимает значения одного знака, совпадающего со знаком коэффициента при x^2. Отсюда следует, что в случае $D<0$ неравенства $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c\geqslant 0$ имеют решением все действительные значения x при $a>0$ и не имеют решений при $a<0$.

Аналогично при $D<0$ неравенства $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c\leqslant 0$ не имеют решения в случае $a>0$ и имеют решением все x, если $a<0$.

2. $D=0$. В этом случае, согласно равенству (7), квадратный трехчлен представим в виде

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (D=0).$$

Следовательно, если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то квадратный трехчлен для всех $x \neq -\frac{b}{2a}$ принимает значения одного знака, совпадающего со знаком коэффициента при x^2; при $x = -\frac{b}{2a}$ он принимает значение, равное нулю. Поэтому в случае $D = 0$:

1) неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ имеет решением любое $x \neq -\frac{b}{2a}$, если $a > 0$, и не имеет решения, если $a < 0$;

2) неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ имеет решением любое $x \neq -\frac{b}{2a}$, если $a < 0$, и не имеет решений, если $a > 0$;

3) неравенство $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ имеет решением любое x, если $a > 0$, и единственное решение $x = -\frac{b}{2a}$, если $a < 0$;

4) неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ имеет решением любое x, если $a < 0$, и $x = -\frac{b}{2a}$, если $a > 0$.

3. $D > 0$. В этом случае квадратный трехчлен можно представить в виде

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{8}$$

где x_1 и x_2 — действительные и различные корни квадратного трехчлена (см. § 4 гл. VI).

Будем считать, что $x_1 < x_2$. Очевидно, что $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ для $x < x_1$ и $x > x_2$ (оба множителя одного знака: соответственно отрицательны или положительны) и $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ для $x_1 < x < x_2$ (первый множитель положителен, а второй отрицателен).

При $x = x_1$ или $x = x_2$, очевидно, $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Поэтому, согласно формуле (8), в случае $a > 0$ квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ положителен для всех x вне отрезка $[x_1; x_2]$ и отрицателен для всех значений x из интервала $(x_1; x_2)$. В случае $a < 0$ — наоборот.

Отсюда вытекает способ решения квадратного неравенства $ax^2 + bx + c \vee 0$, когда $D > 0$.

Приведем геометрическое истолкование. Графиком квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ служит парабола (см. § 4 гл. VII). Расположение этой параболы относительно оси Ox для различных случаев представлено на рис. 11.

Графический способ решения квадратных неравенств будет рассмотрен в гл. VII.

Приведем примеры решения квадратных неравенств.

Пример 3. Решить неравенства: а) $x^2 - 5x + 6 > 0$; б) $-2x^2 + x + 1 \geqslant 0$; в) $-2x^2 + x - 1 < 0$; г) $3x^2 - 4x + 5 < 0$; д) $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

Решение. а) Дискриминант $D = 25 - 4 \cdot 6 > 0$; корни квадратного трехчлена действительны и различны: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Следовательно, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, и данное неравенство принимает вид $(x-2)(x-3)>0$.

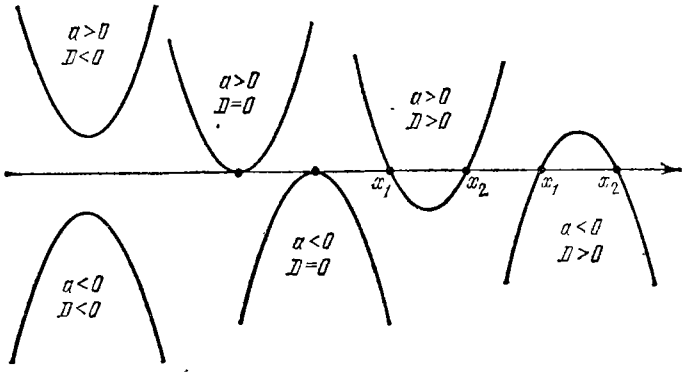


Рис. 11.

Решением неравенства являются числа $x<2$ (оба множителя отрицательны, и произведение их положительно), а также числа $x>3$ (оба множителя положительны, и произведение их положительно).

Ответ. $x<2$, $x>3$.

б) Дискриминант $D=1-4\cdot(-2)=9>0$; корни квадратного трехчлена действительны и различны:

$$x_{1,\,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot(-2)}=\frac{-1\pm3}{-4},$$

откуда $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$, и следовательно, $-2x^2+x+1=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$. Имеем

$$-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\geqslant0 \quad \text{или} \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\leqslant0$$

(при делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный). Неравенству удовлетворяют все числа из отрезка $\left[-\frac{1}{2};\,1\right]$.

Ответ. $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$.

в) Дискриминант $D=1-4\cdot(-2)\cdot(-1)<0$, коэффициент при x^2 отрицателен. Квадратный трехчлен $-2x^2+x-1$ принимает только отрицательные значения.

Ответ. x — любое число.

г) $D=16-4\cdot3\cdot5<0$, коэффициент при x^2 положителен. Квадратный трехчлен $3x^2-4x+5$ принимает только положительные значения.

Ответ. Решений нет.

д) $D=16-4\cdot4=0$. Квадратный трехчлен $4x^2+4x+1$ представляет собой квадрат $(2x+1)^2$, и данное неравенство принимает вид

$$(2x+1)^2>0,$$

откуда следует, что решениями неравенства являются все действительные числа x, кроме $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ. $x\neq-\frac{1}{2}$.

Пример 4. Решить неравенство $(a-2)x^2-x-1\geqslant0$.

Решение. При $a=2$ имеем $-x-1\geqslant0$ или $x\leqslant-1$. При $a\neq2$ неравенство является квадратным. Находим дискриминант: $D=1+4(a-2)=4a-7$. Если $D=4a-7<0$, т. е. $a<\frac{7}{4}$, то коэффициент $a-2<0$, и, следовательно, неравенство решений не имеет (для любого x его левая часть отрицательна).

Если $a=\frac{7}{4}$, т. е. $D=0$, то неравенство принимает вид $-\frac{x^2}{4}-x-1\geqslant0$ или $-(x-2)^2\geqslant0$. Следовательно, его решением будет лишь $x=2$. Если $a>\frac{7}{4}$ и $a\neq2$, то находим корни квадратного трехчлена: $x_1=\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$ и $x_2=\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$. Неравенство запишем в виде $(a-2)(x-x_1)(x-x_2)\geqslant0$.

В случае $\frac{7}{4}<a<2$ коэффициент $a-2<0$, и неравенство равносильно неравенству $(x-x_1)(x-x_2)\leqslant0$. В этом случае $x_1<x_2$. Поэтому решением неравенства являются все числа отрезка $[x_1;\ x_2]$, т. е. $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

В случае $a>2$ неравенство равносильно неравенству $(x-x_1)\times(x-x_2)\geqslant0$. В этом случае $x_1>x_2$. Поэтому решением будут все числа вне интервала $(x_2;\ x_1)$, т. е. $x\leqslant x_2$ и $x\geqslant x_1$.

Ответ. $x=2$, если $a=\frac{7}{4}$; $\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}\leqslant x\leqslant\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$, если $\frac{7}{4}<a<2$; $x\leqslant-1$, если $a=2$; $x\leqslant\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$ и $x\geqslant\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$, если $a>2$; решений нет, если $a<\frac{7}{4}$.

При решении квадратных и более сложных неравенств используется также метод интервалов (§ 14 гл. VI).

§ 13. Системы неравенств с одним неизвестным. Неравенства, содержащие модуль

Пусть заданы несколько неравенств с одним неизвестным. Если требуется найти число, которое является решением всех данных неравенств, то совокупность этих неравенств называют *системой неравенств*.

Решением системы неравенств с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Решить систему неравенств — это значит найти все решения этой системы или установить, что их нет.

Две системы неравенств называются *равносильными*, если всякое решение одной из них является решением другой, и наоборот. Если обе системы неравенств не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x-4<8x+6, \\ 2x-1>5x-4, \\ 11x-9\leqslant 15x+3. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство:

$$\begin{gathered} 3x-4<8x+6, \\ -5x<10, \\ x>-2. \end{gathered}$$

Оно выполняется при $x>-2$.

Решим второе неравенство:

$$\begin{gathered} 2x-1>5x-4, \\ -3x>-3, \\ x<1. \end{gathered}$$

Оно выполняется при $x<1$.

Решим третье неравенство:

$$\begin{gathered} 11x-9\leqslant 15x+3, \\ -4x\leqslant 12, \\ x\geqslant -3. \end{gathered}$$

Оно выполняется при $x\geqslant -3$. Все три данных неравенства верны при $-2<x<1$ (рис. 12).

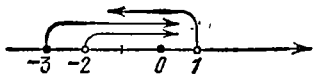


Рис. 12.

Ответ. $-2<x<1$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{2x-1}{x+1}<1$.

Решение. Имеем

$$\frac{2x-1}{x+1}-1<0 \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{x+1}<0.$$

Дробь отрицательна только в тех случаях, когда ее числитель и знаменатель имеют разные знаки. Поэтому полученное неравенство равносильно совокупности двух следующих систем

неравенств:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+1<0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-2<0, \\ x+1>0. \end{cases}$$

Это означает, что решение исходного неравенства состоит из решений каждой из этих систем.

Решая первую систему неравенств, получим

$$\begin{cases} x>2, \\ x<-1. \end{cases}$$

Очевидно, решений нет (неравенства противоречивы).

Решая вторую систему неравенств, получим

$$\begin{cases} x<2, \\ x>-1, \end{cases}$$

т. е. $-1<x<2$.

Ответ. $-1<x<2$.

Рассмотрим неравенства, содержащие модуль. Установим следующие их свойства.

1) *Неравенство*

$$|x|\leqslant a, \tag{9}$$

где $a>0$, *означает то же самое, что и двойное неравенство*

$$-a\leqslant x\leqslant a, \tag{10}$$

т. е. при $a>0$ *неравенство* $|x|\leqslant a$ *равносильно двойному неравенству* $-a\leqslant x\leqslant a$.

Действительно, если $x\geqslant 0$, то $|x|=x$; неравенство $|x|\leqslant a$ имеет вид $x\leqslant a$. Следовательно, все числа отрезка $[0; a]$ являются решениями неравенства (9).

Если же $x<0$, то $|x|=-x$; неравенство $|x|\leqslant a$ имеет вид $-x\leqslant a$, откуда $x\geqslant -a$. Следовательно, все числа полуинтервала $[-a; 0)$ также являются решениями неравенства (9).

Объединяя полученные результаты, заключаем, что все числа отрезка $[-a; a]$ удовлетворяют неравенству (9). Неравенство (10) доказано.

Из неравенства (9) следует неравенство (10).

Наоборот, пусть выполнено неравенство (10). Имеются две возможности: $x\geqslant 0$ и $x<0$. Если $x\geqslant 0$, то $|x|=x$ и вместо $x\leqslant a$ можно написать $|x|\leqslant a$, т. е. справедливо (9).

Если $x<0$, то $|x|=-x$ и вместо $-a\leqslant x$, [или $a\geqslant -x$, можно написать $a\geqslant |x|$, т. е. опять справедливо (9). Из неравенства (10) следует неравенство (9). Свойство доказано.

Геометрически неравенство (9), или равносильное ему неравенство (10), означает, что число x лежит на отрезке между числами $-a$ и a, т. е. расстояние от точки x до точки O не больше a (рис. 13).

Точно так же получим, что неравенство $|x|<a$, где $a>0$, означает то же самое, что и двойное неравенство $-a<x<a$, т. е. при $a>0$ неравенство $|x|<a$ равносильно двойному неравенству $-a<x<a$. В случае $a<0$ приходим к неверным (или противоречивым) неравенствам $|x|\leqslant a$ и $|x|<a$, так как $|x|\geqslant 0$.

2) *Неравенство*

$$|x|>a, \tag{11}$$

где $a>0$ *означает, что* $x>a$, *или* $x<-a$.

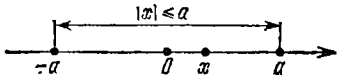


Рис. 13.

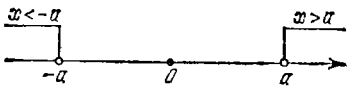


Рис. 14.

В самом деле, если $x\geqslant 0$, то $|x|=x$ и из (11) следует, что $x>a$; если же $x<0$, то $|x|=-x$ и из (11) следует, что $-x>a$, или $x<-a$.

Таким образом, условие $|x|>a$ $(a>0)$ означает, что точка x лежит либо справа от точки a, либо слева от точки $(-a)$ (рис. 14).

Если $|x|\geqslant a$, где $a>0$, то $x\geqslant a$, или $x\leqslant -a$. Очевидно, что при $a<0$ неравенства $|x|>a$ и $|x|\geqslant a$ выполняются для любого значения x.

Пример 3. Решить неравенство $|2x-3|\leqslant 5$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству

$$-5\leqslant 2x-3\leqslant 5.$$

Так как двойное неравенство $-5\leqslant 2x-3\leqslant 5$ означает краткую запись двух неравенств $-5\leqslant 2x-3$ и $2x-3\leqslant 5$, то можно применить основные свойства неравенств.

Прибавляя к каждой части неравенства $-5\leqslant 2x-3\leqslant 5$ число 3, получаем $-2\leqslant 2x\leqslant 8$, откуда делением каждой части на число 2 находим, что $-1\leqslant x\leqslant 4$. Множеством решения является отрезок $[-1;\ 4]$.

Ответ. $-1\leqslant x\leqslant 4$.

Пример 4. Решить неравенство $|1-x|>3$.

Решение. Так как $|1-x|=|x-1|$, то имеем $|x-1|>3$. Это неравенство выполняется в том случае, когда $x-1>3$, или $x-1<-3$, т. е. при $x>4$ или $x<-2$. Множество решений изображается на числовой оси двумя лучами.

Ответ. $x>4$, $x<-2$.

Пример 5. Решить неравенство $x^2+4x+4<25$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$(x+2)^2<25.$$

Извлекая из обеих частей неравенства арифметический квадратный корень, получаем

$$|x+2|<5,$$

или $-5 < x+2 < 5$, откуда $-7 < x < 3$. Множеством решений является интервал $(-7; 3)$.

Ответ. $-7 < x < 3$.

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{9x^2+6x+1} < 2-x$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\sqrt{(3x+1)^2} < 2-x,$$

или

$$|3x+1| < 2-x,$$

равносильное совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 3x+1 \geqslant 0, \\ 3x+1 < 2-x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x+1 < 0, \\ -(3x+1) < 2-x. \end{cases}$$

Решением первой системы является полуинтервал $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$, решением второй системы — интервал $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right)$. Следовательно, решением исходного неравенства является интервал $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

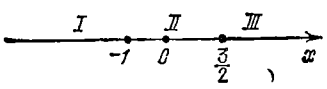


Рис. 15.

Ответ. $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{4}$.

Пример 7. Решить неравенство $x+|3-2x| > |x+1|-1$.

Решение. Запишем неравенство в виде $x+2\left|x-\frac{3}{2}\right| > |x+1|-1$, и отметим на числовой оси точки $x=-1$ и $x=\frac{3}{2}$ (рис. 15), в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка:

$$x \leqslant -1 \ (I); \quad -1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \ (II); \quad x \geqslant \frac{3}{2} \ (III).$$

Рассматривая x последовательно на каждом из этих промежутков, получим, что исходное неравенство равносильно совокупности следующих трех систем неравенств:

$$\begin{cases} x \leqslant -1, \\ x-2\left(x-\frac{3}{2}\right) > -(x+1)-1; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}, \\ x-2\left(x-\frac{3}{2}\right) > x+1-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2}, \\ x+2\left(x-\frac{3}{2}\right) > x+1-1. \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, находим, что решением первой является промежуток $x \leqslant -1$, решением второй — промежуток $-1 \leqslant x < \frac{3}{2}$ и решением третьей — промежуток $x > \frac{3}{2}$. Сле-

довательно, решением данного неравенства являются все действительные числа x, кроме $x=\frac{3}{2}$.

Ответ. $x \neq \frac{3}{2}$.

§ 14. Задачи на уравнения и неравенства. Метод интервалов

Рассмотрим несколько задач, связанных с выявлением определенных свойств уравнений и неравенств и их решений.

Пример 1. Определить коэффициенты квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0,$$

если его корни равны p и q.

Решение. Если дискриминант $D=p^2-4q \geqslant 0$, то по теореме Виета

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q.$$

Пусть $x_1=p$, $x_2=q$. Тогда

$$\begin{cases} p+q=-p, \\ pq=q. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$. Если $p=0$, $q=0$, то $D=0$; если $p=1$, $q=-2$, то $D>0$.

Ответ. $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$.

Пример 2. В уравнении $x^2-2x+c=0$ определить значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2-4x_1=47$.

Решение. По теореме Виета

$$x_1+x_2=2, \quad x_1x_2=c.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1x_2=c, \\ 7x_2-4x_1=47. \end{cases}$$

Решая линейную систему

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ 7x_2-4x_1=47, \end{cases}$$

получим $x_1=-3$, $x_2=5$. Поэтому $c=x_1x_2=-15$.

Пример 3. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2-(a+1)x+a+4=0$ оказываются отрицательными?

Решение. Найдем дискриминант уравнения

$$D=(a+1)^2-4(a+4)=a^2-2a-15.$$

Пусть $D \geqslant 0$. Решая квадратное неравенство $a^2-2a-15 \geqslant 0$, получим $a \leqslant -3$, $a \geqslant 5$.

Выясним, при каких значениях a из этих промежутков оба корня уравнения отрицательны.

Обозначим произведение корней через P, а их сумму — S. По теореме Виета

$$P=x_1x_2=a+4, \quad S=x_1+x_2=a+1.$$

Условие отрицательности обоих корней квадратного уравнения: дискриминант D неотрицателен; произведение корней P положительно и сумма корней S отрицательна.

Имеем $P>0$, т. е. $a+4>0$, или $a>-4$. Если $-4<a \leqslant -3$, то $D \geqslant 0$, $P>0$, $S<0$ — корни отрицательны; если $a \geqslant 5$, то $D \geqslant 0$, $P>0$, $S>0$ — корни положительны.

Итак, оба корня отрицательны при $-4<a \leqslant -3$.

Пример 4. Решить в целых числах уравнение $xy=2x-y$.

Решение. Из уравнения находим

$$y=\frac{2x}{x+1},$$

где $x \neq -1$. Запишем дробь в виде

$$y=\frac{(2x+2)-2}{x+1}=2-\frac{2}{x+1}.$$

Отсюда следует, что значение y будет целым лишь в том случае, когда дробь $\frac{2}{x+1}$ есть целое число, а это возможно при целом x, когда $x+1=\pm 1$ или $x+1=\pm 2$.

Подставляя соответствующие x в формулу $y=\frac{2x}{x+1}$, находим все целые решения данного уравнения: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=-2$, $y_2=4$; $x_3=1$, $y_3=1$; $x_4=-3$, $y_4=3$.

Пример 5. При каких значениях a неравенство

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

выполняется для всех значений x?

Решение. Квадратный трехчлен x^2-x+1 принимает только положительные значения, так как его дискриминант $D=1-4<0$ и коэффициент при x^2 больше нуля. Получаем двойное неравенство

$$-3x^2+3x-3<x^2+ax-2<2x^2-2x+2$$

или систему неравенств

$$\begin{cases} -3x^2+3x-3<x^2+ax-2, \\ x^2+ax-2<2x^2-2x+2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4x^2+(a-3)x+1>0, \\ x^2-(a+2)x+4>0. \end{cases}$$

Каждое из этих неравенств будет выполняться при всех значениях x, если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен:

$$\begin{cases} D_1=(a-3)^2-16<0, \\ D_2=(a+2)^2-16<0. \end{cases}$$

Находим

$$\begin{cases} (a-3)^2<16, \\ (a+2)^2<16 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} |a-3|<4, \\ |a+2|<4, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} -4<a-3<4, \\ -4<a+2<4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -1<a<7, \\ -6<a<2; \end{cases}$$

следовательно, $-1<a<2$.

Пример 6. Решить неравенство $|x^2-5x|\geqslant 6$.

Решение. Данное неравенство, содержащее модуль, означает, что $x^2-5x\geqslant 6$ или $x^2-5x\leqslant -6$.

Решая неравенство $x^2-5x-6\geqslant 0$, получим $x\leqslant -1$, $x\geqslant 6$.

Решая неравенство $x^2-5x+6\leqslant 0$, получим $2\leqslant x\leqslant 3$.

Ответ. $x\leqslant -1$; $2\leqslant x\leqslant 3$, $x\geqslant 6$.

Пример 7. Доказать, что уравнение

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{x-1}=1,$$

где a и b — действительные числа, одновременно не равные нулю, имеет лишь действительные корни.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $a^2(x-1)+b^2x=x(x-1)$ или $x^2-(a^2+b^2+1)x+a^2=0$ при условии, что $x\neq 0$, $x\neq 1$ и $ab\neq 0$.

Дискриминант полученного квадратного уравнения

$$D=(a^2+b^2+1)^2-4a^2=(a^2+b^2+1+2a)(a^2+b^2+1-2a)=$$
$$=((a+1)^2+b^2)((a-1)^2+b^2)\geqslant 0$$

при любых a и b. Следовательно, квадратное уравнение имеет всегда действительные корни. При условии $ab\neq 0$ корни отличны от 0 и 1: если бы $x=0$, то и a было бы равно 0; если бы $x=1$, то $1-(a^2+b^2+1)+a^2=0$, и значит, b было бы равно нулю.

Если $a=0$ $(b\neq 0)$, то исходное уравнение принимает вид $\frac{b^2}{x-1}=1$ и имеет корень $x=1+b^2$. Если $b=0$ $(a\neq 0)$, то исходное уравнение принимает вид $\frac{a^2}{x}=1$ и имеет корень $x=a^2$. Таким образом, при любых a и b, одновременно не равных нулю, исходное уравнение имеет лишь действительные корни.

Пример 8. Исследовать корни уравнения $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$ в зависимости от параметра a.

Решение. Если $a=2$, то уравнение является линейным: $-4x+4-3=0$; оно имеет положительный корень $x=\frac{1}{4}$.

При $a \neq 2$ данное уравнение является квадратным с дискриминантом

$$D = 4a^2 - 4(a-2)(2a-3) = -4(a-1)(a-6),$$

если разложить на множители квадратный трехчлен относительно a.

Если $a < 1$ или $a > 6$, то $D < 0$, и уравнение не имеет действительных корней.

Если $1 \leqslant a \leqslant 6$ $(a \neq 2)$, то $D \geqslant 0$. По теореме Виета

$$P = x_1 x_2 = \frac{2a-3}{a-2} = \frac{2\left(a-\frac{3}{2}\right)}{a-2},$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{2a}{a-2}.$$

Найдем на числовой оси интервалы знакопостоянства величин D, P, S (рис. 16).

При $a = 1$, имеем $D = 0$, $P > 0$, $S < 0$, и следовательно, корни равные $(D = 0)$, одинакового знака $(P > 0)$ и притом отрицательные $(S < 0)$.

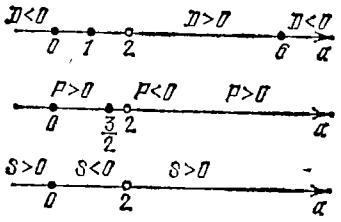


Рис. 16.

На интервале $1 < a < \frac{3}{2}$ имеем $D > 0$, $P > 0$, $S < 0$, и, следовательно, корни различные и оба отрицательные.

При $a = \frac{3}{2}$ имеем $D > 0$, $P = 0$, $S < 0$—один корень равен нулю, а другой—отрицательный.

На интервале $\frac{3}{2} < a < 2$ имеем $D > 0$, $P < 0$, $S < 0$—корни разных знаков $(P < 0)$, причем бо́льший по модулю корень отрицательный $(S < 0)$.

На интервале $2 < a < 6$ $D > 0$, $P > 0$, $S > 0$—корни различные, оба положительные.

При $a = 6$ имеем $D = 0$, $P > 0$, $S > 0$—корни равные положительные.

Метод интервалов. Рассмотрим решение методом интервалов неравенств вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0, \qquad (12)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$—многочлены, а символ $\vee$ означает любой из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$.

Метод интервалов основан на следующем свойстве многочленов.

Число x_0 называется корнем многочлена $P(x)$, если при значении $x = x_0$ многочлен принимает значение, равное нулю, т. е. $P(x_0) = 0$. Приведем без доказательства свойство действительных корней многочлена: если x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$—два соседних корня многочлена, т. е. в интервале $(x_1; x_2)$ других корней многочлен не имеет, то в этом интервале многочлен сохраняет знак: для

любого числа x из интервала $(x_1; x_2)$ многочлен принимает значения одинакового знака.

Это свойство многочлена можно сформулировать так: если x_0 — действительный корень многочлена $P(x)$, то при переходе через точку $x = x_0$ многочлен $P(x)$ меняет знак.

Поясним на следующем примере. Рассмотрим квадратный трехчлен (т. е. многочлен второй степени) $x^2 - 3x + 2$. Найдем его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ и разложим квадратный трехчлен на множители:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Точки $x = 1$ и $x = 2$ разбивают числовую ось на три интервала. Из разложения квадратного трехчлена следует, что в каждом из этих интервалов трехчлен сохраняет знак. Если двигаться вдоль числовой оси слева направо, то знак квадратного трехчлена будет меняться: плюс, минус, плюс, причем смена знака происходит только при переходе через корень трехчлена (рис. 17).

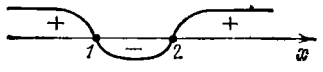


Рис. 17.

На рис. 17 знакочередование изображено волнистой линией.

Для решения неравенств вида (12) методом интервалов надо:

1) найти все действительные корни многочленов $P(x)$ и $Q(x)$;

2) оставить из найденных корней только те, которые не являются одновременно корнями многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, и расположить эти корни в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$;

3) отметить на числовой оси точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, разбивающие числовую ось на интервалы, в каждом из которых дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ сохраняет знак;

4) выбрать какую-нибудь точку из крайнего слева интервала $x < x_1$ и установить по знаку дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в этой точке ее знак для всех $x < x_1$;

5) изобразить соответствующей линией знакочередование и получить все решения неравенства (12) в зависимости от значения символа $\vee$.

Пример 9. Решить методом интервалов неравенство

$$\frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 2x + 2)}{(x - 3)(x - 1 - 2x^2)} \geqslant 0.$$

Решение. Заметим, что дискриминанты квадратных трехчленов $x^2 + 2x + 2$ и $-2x^2 + x - 1$ отрицательны. Поэтому трехчлены принимают значения одного знака, совпадающего со знаком коэффициента при x^2: $x^2 + 2x + 2 > 0$, $-2x^2 + x - 1 < 0$ для любого x. Данное неравенство запишем в виде

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 3} \leqslant 0.$$

Отметим на числовой оси точки $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ (рис. 18).

В интервале $x<1$ возьмем какую-нибудь точку, например $x=0$. В этой точке дробь $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}=-\frac{2}{3}<0$. На рис. 18 изображено знакочередование. В точках $x=1$ и $x=2$ дробь обращается в нуль; $x=1$ и $x=2$ — решения данного нестрогого неравенства.

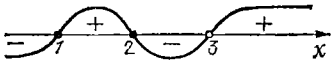


Рис. 18.

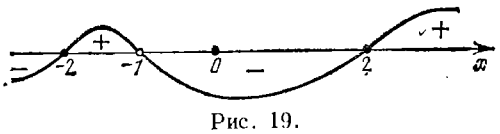


Рис. 19.

При $x=3$ дробь теряет смысл.

Получаем решение неравенства: $x\leqslant 1$, $2\leqslant x<3$.

Пример 10. Решить неравенство

$$\frac{(x^2-3x+2)(x+2)^3x^2}{(x^2-1)(x-3)^4}\geqslant 0.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4}\geqslant 0.$$

Так как $x^2\geqslant 0$, $(x-3)^4\geqslant 0$ и $(x+2)^3$ совпадает по знаку с $(x+2)$ для любого x, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+1}\geqslant 0 \qquad (*)$$

для всех $x\neq 1$, $x\neq 3$, $x\neq 0$, причем $x=0$ обращает левую часть исходного неравенства в нуль и, следовательно, является решением, а $x=1$ и $x=3$ не являются решением (при этих значениях x дробь в левой части данного неравенства теряет смысл). Решаем неравенство (*) методом интервалов (рис. 19).

Ответ. $-2\leqslant x<-1$, $x=0$, $x\geqslant 2$.

Упражнения

Раздел I

Решить уравнения (№ 1—16):

1. $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+x+6}$. 2. $\frac{3(9x-3)}{9x-6}=2+\frac{3x+1}{3x-2}$.

3. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$. 4. $ax-3=x$. 5. $ax+b=x$.

6. $\frac{a}{1-bx}=\frac{b}{1-ax}$ $(ab\neq 0)$. 7. $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}$.

8. $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2$. 9. $\frac{x}{2a+x}-\frac{2a+x}{x-2a}=\frac{16a^2}{4a^2-x^2}$.

10. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$. 11. $x^3+x^2-2=0$.

12. $4x^4-5x^2+1=0$. 13. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$. 14. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$.

15. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$. **16.** $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}$.

17. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ таковы, что $x_1^2+x_2^2=1{,}75$. Найти значение a.

18. Не решая уравнения $x^2-3x-10=0$, вычислить сумму кубов его корней.

19. При каком значении a один из корней уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2+2=0$ в два раза больше другого?

20. Составить биквадратное уравнение, сумма квадратов корней которого равна 50, а произведение корней равно 144.

Решить системы уравнений (№ 21—27):

21. $\begin{cases}\sqrt{xy-2x}=4,\\ \sqrt{\dfrac{y}{x-2}}=1.\end{cases}$ **22.** $\begin{cases}(a-1)x+2ay=-2,\\ 2ax+(a-1)y=a-1.\end{cases}$

23. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=13,\\ x+y=4.\end{cases}$ **24.** $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12},\\ x^2-y^2=7.\end{cases}$

25. $\begin{cases}x+xy+y=11,\\ x^2y+xy^2=30.\end{cases}$ **26.** $\begin{cases}y^2-xy=-12,\\ x^2-xy=28.\end{cases}$ **27.** $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3,\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

Решить задачи на составление уравнений (№ 28—41):

28. Поезд должен был пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан у семафора на 10 мин. Увеличив скорость после этого на 10 км/ч, он прибыл на место назначения с опозданием на 2 мин. Определить первоначальную скорость поезда.

29. Две бригады, работая вместе, закончили заготовку леса за 6 дней. Сколько дней потребовалось бы каждой бригаде на выполнение этой работы, если одной бригаде для этого требуется на 5 дней меньше, чем другой?

30. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции возрос в два раза.

31. Произведение цифр двузначного числа в два раза больше суммы этих цифр. Если к этому двузначному числу прибавить 27, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

32. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый; при этом было 44 попадания, остальные промахи. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на каждый промах приходилось в два раза больше попаданий, чем у второго?

33. Кусок материи стоит 35 рублей. Если бы в куске было на 4 м материи больше, а каждый метр стоил на 1 рубль дешевле, то стоимость куска материи осталась бы прежней. Сколько метров материи было в куске?

34. Расстояние от A до B по течению моторная лодка проплывает за 8 ч, а от B до A против течения — за 12 ч. За сколько часов проплывет расстояние от A до B плот? Скорость плота равна скорости течения.

35. Четыре года назад отец был в шесть раз старше сына; через 16 лет отец будет вдвое старше сына. Сколько лет каждому?

36. Продают три куска ткани. Из первого продали половину, из второго 2/3, а третий кусок, в котором была 1/3 всей ткани, продали весь. Сколько

процентов ткани продано, если всего осталось вдвое меньше, чем было во втором куске?

37. Объем вещества A составляет половину суммы объемов веществ B и C, а объем вещества B составляет одну пятую часть суммы объемов веществ A и C. Найти отношение объема вещества C к сумме объемов веществ A и B.

38. Рабочий положил на хранение в сберегательную кассу 500 р. По истечении года к его вкладу были причислены процентные деньги, и в то же время он увеличил свой вклад еще на 500 р., а по истечении еще одного годового срока попросил отдать ему накопленные процентные деньги. Сколько процентов в год начисляет сберкасса, если рабочий получил 30 р. 20 к. процентных денег, оставив свой вклад в 1000 р. на новый срок?

39. Дорога от A до B длиной 11,5 км идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. Пешеход, идя из A в B, прошел всю дорогу за 2 ч 54 мин, а на обратную дорогу затратил 3 ч 6 мин. Скорость ходьбы: в гору 3 км/ч, по ровному месту 4 км/ч, под гору 5 км/ч. На каком протяжении дорога идет по ровному месту?

40. Имеются две бочки бензина разной цены. В одной 220 л, а в другой 180 л. Из каждой берут по одинаковому количеству бензина и переливают в другую, после чего цена литра бензина в каждой бочке стала одинаковой. Какое количество литров было перелито?

41. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 р. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, и поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 р. больше, чем предполагалось. Сколько стоит магнитофон, если студенты платили поровну?

Доказать неравенства (№ 42—46):

42. $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geqslant 6abc$.

43. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$.

44. $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$.

45. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

46. $a^3+b^3<c^3$, если a и b — длины катетов, c — длина гипотенузы.

Решить неравенства и системы неравенств (№ 47—57):

47. $\frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2}-\frac{1}{2}$. **48.** $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.

49. $\begin{cases} 7(x+1)-2x>9-4x, \\ 3(5-2x)-1 \geqslant 4-5x. \end{cases}$ **50.** $\begin{cases} 3x \leqslant 5-6x, \\ 4x-1 \geqslant 1-3x, \\ 7-2x>2x+9. \end{cases}$

51. $(a+1)x+4<(3-2a)x-1$. **52.** $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$.

53. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$. **54.** $\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3} \geqslant 0$.

55. $5-x-\frac{6}{x} \geqslant 0$. **56.** $5x-20 \leqslant x^2 \leqslant 8x$. **57.** $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1$.

Решить уравнения и неравенства, содержащие модуль (№ 58—65):

58. $|x-1|=3$. **59.** $|x-1|=|x+2|$. **60.** $|x-2|-|x-1|=1$.

61. $x^2-2|x-1|=2$. **62.** $x|x-3|=2$. **63.** $|x-2|>|x+1|-3$.

64. $\left|\frac{x^2-1}{x+2}\right|<1$. **65.** $|2x^2-9x+15| \geqslant 20$.

66. При каких значениях a оба корня квадратного трехчлена $x^2+2(a+1)x+9a-5$ отрицательны?

67. При каких значениях a квадратный трехчлен $ax^2-7x+4a$ принимает отрицательные значения для любых действительных значений x?

68. При каких значениях a неравенство $\frac{x^2-ax-2}{x^2-3x+4}>-1$ выполняется при любом x?

69. Доказать, что если между коэффициентами уравнений

$$x^2+p_1x+q_1=0 \quad \text{и} \quad x^2+p_2x+q_2=0$$

выполняется соотношение $p_1p_2=2(q_1+q_2)$, то по крайней мере одно из уравнений имеет действительные корни.

70. При каких значениях a корни уравнения

$$(a+1)x^2-3ax+4a=0 \quad (a\neq -1)$$

действительны и больше 1?

Раздел II

71. Равносильны ли данные уравнения:

а) $x^3=1$ и $(x-1)(x^2+x+1)=0$;

б) $7x^2-2x=3x^3$ и $7x-2=3x^2$?

Решить уравнения (№ 72–74):

72. $\frac{2x+1}{x+3}-\frac{x-1}{x^2-9}=\frac{x+3}{3-x}-\frac{4+x}{3+x}$.

73. $\frac{x^2+10x}{x^4-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{4x+21}{x^3+x^2+x+1}+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}$.

74. $\frac{x+6}{x-1}-\frac{x^2+17}{x^2+x+1}=\frac{x+36}{x^3-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}$.

Решить уравнения относительно x (№ 75,76):

75. $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$.

76. $\frac{a+4b}{x+2b}-\frac{a-4b}{x-2b}=\frac{4b}{a}$.

77. а) Считая, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, составить уравнение, корни которого $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

б) Считая, что x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, составить уравнение, корни которого $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

78. Выразить сумму квадратов корней уравнения $x^2+px+q=0$ через коэффициенты p и q.

79. Выразить сумму кубов корней уравнения $x^2+px+q=0$ через коэффициенты p и q.

80. Решить уравнение $x^2+px+45=0$, зная, что квадрат разности его корней равен 144.

81. В уравнении $x^2-6x+q=0$ найти значение q, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $3x_1+2x_2=20$.

82. Найти двузначное число, если число его единиц на 2 больше числа десятков, а произведение этого числа на сумму цифр, обозначающих его, равно 144.

83. На плоскости отмечено несколько точек. Каждые две из них соединены отрезком. Всего отрезков оказалось 10. Сколько точек отмечено на плоскости?

84. Половину пути мотоциклист шел с одной скоростью. Затем задержался на 5 мин, а поэтому, чтобы наверстать потерянное время, увеличил скорость на 10 км/ч. Найти первоначальную скорость мотоциклиста, если весь путь, пройденный им, равен 50 км.

Решить уравнения (№ 85—91):

85. $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=24$. 86. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$.

87. $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$.

88. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$. 89. $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{3x+4}$.

90. $\sqrt{a+\sqrt{x}}-\sqrt{a-\sqrt{x}}=\sqrt{a}$. 91. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}$.

Решить системы уравнений (№ 92—94):

92. $\begin{cases}\frac{x+1}{y-3}=1,\\(x+1)(y-3)=4.\end{cases}$ 93. $\begin{cases}x^2+3xy=18,\\xy+4y^2=7.\end{cases}$

94. $\begin{cases}\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=10,\\\sqrt{xy}=16.\end{cases}$

95. Два рабочих, работая одновременно, выполняют некоторый объем работы за 12 часов. Если бы сначала первый выполнил половину работы, а затем другой — оставшуюся часть, то им понадобилось бы 25 часов. За какое время каждый рабочий мог бы выполнить эту работу, работая один?

Решить неравенства и системы неравенств (№ 96—101):

96. а) $x^2+5x-14>0$; б) $2x^2-5x-3\leqslant 0$.

97. а) $\frac{2-3x}{x+1}<0$; б) $\frac{3x-2}{x-2}\leqslant 0$.

98. а) $\begin{cases}2x+1>3x+4,\\5x+3\geqslant 8x+21;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x-2\geqslant 2x+1,\\2x+3<18-3x.\end{cases}$

99. а) $|1-2x|>3-x$; б) $|x+8|\leqslant 3x-1$.

100. а) $(x-1)(x+2)(x-5)>0$; б) $(2x+1)(x-4)(3x-2)(x+7)\leqslant 0$.

101. а) $\frac{x^2+x-6}{2x^2+9x-5}\geqslant 0$; б) $\frac{x-3,5}{x^2+3x-40}<0$.

102. Доказать неравенства:

а) $|a|-\frac{1}{a}>1$ при $a<-1$; б) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$ при $x>0$, $y>0$;

в) $x^2+y^2+z^2+3>2(x+y+z)$ при $x\neq y\neq z\neq 1$.

Глава VII. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 1. Понятие функции. Способы задания функции

При изучении явлений окружающего мира и в практической деятельности мы сталкиваемся с величинами различной природы: длина; площадь, объем, масса, температура, время и т. д. В за-

висимости от рассматриваемых условий одни из величин имеют постоянные числовые значения, у других эти значения переменные. Такие величины называются *постоянными* и *переменными*.

Математика изучает зависимость между переменными в процессе их изменения. Например, при изменении радиуса круга меняется и его площадь, и мы рассматриваем вопрос об изменении площади круга в зависимости от изменения его радиуса.

Пусть переменная x принимает числовые значения из множества E.

Определение. *Функция* — это правило, которое каждому числу x из E сопоставляет одно определенное число y.

При этом x называют *независимой* переменной или *аргументом* функции, а y — *зависимой* переменной; множество E — *областью определения* или *областью задания* функции. Множество значений, принимаемых переменной y, называется *множеством значений* или *областью изменения* функции.

Запись $y=f(x)$ или $y(x)$ означает, что y зависит от x. Буква f символизирует правило, по которому получается значение y, соответствующее данному значению x из множества E.

Вместо букв x, E, y, $f(x)$ используются и любые другие буквы и обозначения.

Задать функцию $y=f(x)$ на множестве E — это значит указать правило, по которому для каждого x из E получается соответствующее ему значение y.

Рассмотрим основные способы задания функции.

1) Функция может быть задана формулой.

При этом функция может задаваться одной формулой во всей области ее определения или несколькими, различными для разных частей области ее определения. Например,

$$y=3x;\quad y=\begin{cases} x, & \text{если } x\leqslant 0,\\ x^2, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

Такой способ задания функции называется *аналитическим*.

В общем случае, если нет специальной оговорки, за область определения функции, заданной аналитически, принимают область существования соответствующего аналитического выражения, т. е. множество значений x, для которых это выражение имеет смысл. Например, функция $y=x^2$ определена на всей числовой оси, как и задающее ее аналитическое выражение. Но если эта функция выражает зависимость площади квадрата от длины его стороны, то функция $y=x^2$ задана для любого $x>0$.

2) Функция может быть задана таблицей.

Записываются в виде таблицы значения аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие им значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Такой способ задания функции называется *табличным*.

Табличный способ задания функции часто применяется во время опытов, когда исследуется зависимость между величинами.

Табличное задание функции $y=f(x)$ неудобно тем, что значения функции определяются только для тех значений x, которые приведены в таблице.

3) Функция может быть задана с помощью ее графика.

На координатной плоскости Oxy (см. § 3 гл. IV) для каждого значения x из множества E (области определения функции) строится точка $M(x; y)$, абсцисса которой равна x, а ордината — соответствующему значению функции $y(x)$. Построенные точки образуют некоторую линию, которую называют *графиком* данной функции.

Вообще, график функции $y=f(x)$, заданной на множестве E, есть множество точек $M(x; f(x))$, где $x \in E$, координатной плоскости.

Способ задания функции с помощью графика называют *графическим*. Чтобы по заданному графику найти значение функций $y(x)$ при каком-то определенном значении x, поступим следующим образом. Проведем через точку x оси абсцисс перпендикуляр к этой оси и найдем точку пересечения его с графиком данной функции. Ордината точки пересечения и дает соответствующее значение функции.

Графический способ задания функции широко используется в научных исследованиях и в современном производстве. Самопишущие приборы автоматически вычерчивают графики изменения различных величин.

Пример. Найти область задания функций:

а) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$; б) $y=\sqrt{4-x^2}$; в) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. а) Функция задана для всех значений x, кроме тех, для которых $x^2-3x+2=0$. Решая это квадратное уравнение, находим $x=1$ и $x=2$. Таким образом, область определения функции состоит из трех интервалов $(-\infty, 1)$; $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$.

б) Область задания функции определяется из условия $4-x^2 \geqslant 0$. Решая это неравенство, получим $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Таким образом, область задания функции есть отрезок $[-2; 2]$.

в) Область задания функции определяется из условия $4-x^2 > 0$, откуда $-2 < x < 2$. Следовательно, область задания функции — интервал $(-2; 2)$.

Мы будем чаще всего рассматривать функции, заданные аналитически, причем область определения их представляет собой промежуток (отрезок, интервал или полуинтервал).

§ 2. Свойства функций

Четные и нечетные функции. Пусть функция $y=f(x)$ задана в некотором промежутке, симметричном относительно точки O (в частности, на всей оси Ox). Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если для любого x

$$f(-x)=f(x).$$

Примеры четных функций: $y=x^2$; $y=x^2+3$; $y=-3x^2+4$; $y=|x|$; $y=4$.

В самом деле, $(-x)^2=x^2$; $(-x)^2+3=x^2+3$; $-3(-x)^2+1=-3x^2+1$; $|-x|=|x|$; $y=4$ для любого x.

Сумма, разность, произведение и частное четных функций также есть четная функция.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если для любого x

$$f(-x)=-f(x).$$

Примеры нечетных функций: $y=x^3$; $y=x^3+x$; $y=\frac{x}{x^2+1}$.

В самом деле, $(-x)^3=-x^3$; $(-x)^3+(-x)=-(x^3+x)$; $\frac{(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}$ для любого x.

Сумма и разность нечетных функций есть функция нечетная, а произведение и частное нечетных функций — функция четная.

Не следует считать, что каждая функция является четной или нечетной. Большинство функций свойством четности или нечетности не обладает. Например, такова функция $y=x^3+x^2$. В самом деле, $(-x)^3+(-x)^2=-x^3+x^2$, т. е. $(-x)^3+(-x)^2\neq x^3+x^2$ и также $(-x)^3+(-x)^2\neq-(x^3+x^2)$.

Из определения четных и нечетных функций вытекает, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной — относительно начала координат.

Действительно, пусть точка $M(x_0; y_0)$ является точкой графика четной функции $y=f(x)$, т. е. $y_0=f(x_0)$.

Рассмотрим точку $N(-x_0; y_0)$ (рис. 20), симметричную точке $M(x_0; y_0)$ относительно оси Oy. В силу четности данной функции

$$f(-x_0)=f(x_0)=y_0,$$

а это означает, что точка $N(-x_0; y_0)$ также принадлежит графику функции $y=f(x)$.

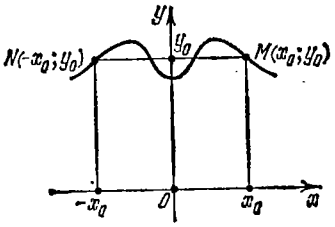


Рис. 20.

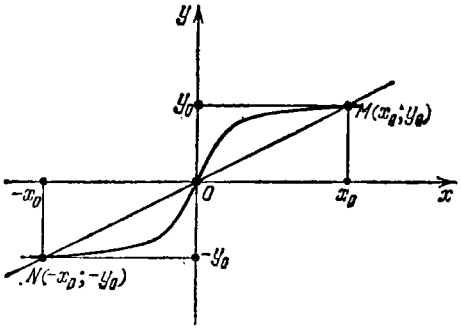


Рис. 21.

Симметрия графика нечетной функции относительно начала координат следует из того, что наряду с точкой $M(x_0; y_0)$ графика нечетной функции этому графику также принадлежит и

точка $N(-x_0; -y_0)$, симметричная точке $M(x_0; y_0)$ относительно начала координат. Точка O—середина отрезка MN (рис. 21).

Монотонные функции. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей в некотором промежутке, если для любых двух значений x из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из данного промежутка.

Ордината графика возрастающей функции возрастает с возрастанием x (рис. 22).

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* в некотором промежутке, если для любых двух значений x из этого промежутка

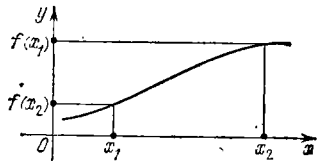


Рис. 22.

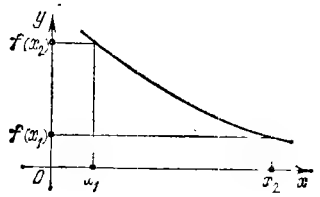


Рис. 23.

большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из этого промежутка.

Ордината графика убывающей функции убывает с возрастанием x (рис. 23).

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными* функциями.

Промежутки знакопостоянства и корни функции. Промежутки, в которых функция сохраняет свой знак (т. е. остается положительной или отрицательной), называются промежутками *знакопостоянства* функции.

Например, функция $y=x^2+1$ положительна на всей оси Ox; функция $y=x^3$ положительна при $x>0$ и отрицательна при $x<0$, ее промежутки знакопостоянства — интервалы $(0; +\infty)$ и $(-\infty; 0)$; следовательно, график функции $y=x^3$ расположен выше оси Ox при $x>0$ и ниже оси Ox при $x<0$.

Значения аргумента x, при которых $f(x)=0$, называются *корнями* (или нулями) функции $f(x)$. Таким образом, корень функции $f(x)$—то же, что и корень уравнения $f(x)=0$. Корни функции—это точки пересечения ее графика с осью Ox.

Корнем функции $y=x^3$ является $x=0$. Функция $y=x^2+1$ действительных корней не имеет.

§ 3. Обратная функция и ее график

Пусть дана функция $y=f(x)$; E—ее область задания, D—множество значений. Тогда каждому значению x_0 из E будет отвечать одно определенное значение $y_0=f(x_0)$ из D.

Возьмем какое-нибудь число y_0 из D. В области E обязательно найдется хотя бы одно число x_0, при котором $f(x_0)=y_0$.

Вообще, каждому значению y_0 из D будет соответствовать одно или несколько значений x_0 из E, для которых $f(x_0)=y_0$. Чтобы получить эти значения x_0, можно через точку y_0 на оси ординат провести прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечет график функции $y=f(x)$ в одной или нескольких точках. Абсциссы этих точек и дают искомые значения x (одно из них x_0), при которых функция равна y_0 (рис. 24).

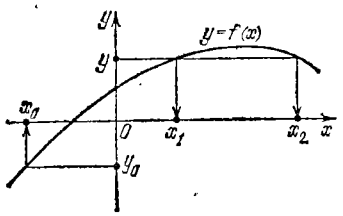


Рис. 24.

Допустим, что функция $y=f(x)$ такова, что каждому значению y_0 из D отвечает одно значение x_0 из E, для которого $f(x_0)=y_0$. Этим определяется в области D функция $x=g(y)$, которая называется *обратной* для функции $y=f(x)$.

Если E — промежуток и функция $y=f(x)$ является монотонной (возрастающей или убывающей), то она имеет обратную функцию $x=g(y)$, соответственно возрастающую или убывающую. На рис. 25 приведен пример возрастающей функции. Функция, график которой изображен на рис. 24, обратной функции не имеет.

Если функция, заданная формулой, имеет обратную функцию, то для нахождения формулы, задающей обратную ей функцию, надо из данной формулы выразить x через y.

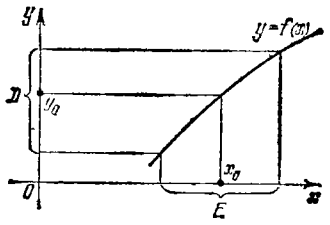


Рис. 25.

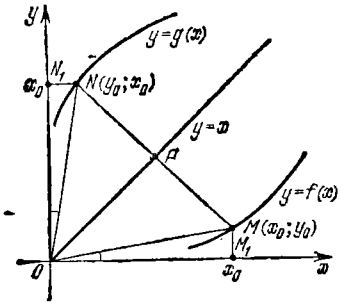


Рис. 26.

Например, составим формулу, задающую функцию, обратную данной, $y=2x-1$. Имеем $x=\frac{y+1}{2}$ — обратная функция.

Графики функций $y=2x-1$ и $x=\frac{y+1}{2}$ совпадают, так как обе функции выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y. Вообще, графиком функции $y=f(x)$ и обратной ей функции $x=g(y)$ служит одна и та же кривая. Обычно при изучении обратной функции обозначают ее аргумент через x, а

зависимую переменную — через y, т. е. вместо $x=g(y)$ пишут $y=g(x)$. В такой записи для функции $y=2x-1$ обратной будет функция $y=\frac{x+1}{2}$.

Графики двух взаимно обратных функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно биссектрисы $y=x$ первого и третьего координатных углов (рис. 26).

Доказательство. Пусть $M(x_0; y_0)$ является точкой графика функции $y=f(x)$. Тогда по определению понятия обратной функции точка $N(y_0; x_0)$ будет принадлежать графику обратной функции $y=g(x)$. Надо доказать, что точки $M(x_0; y_0)$ и $N(y_0; x_0)$ симметричны относительно прямой $y=x$. Для этого рассмотрим треугольник MON. В треугольнике MON $|OM|=|ON|$, а отрезок OP является биссектрисой.

В самом деле, $|OM|=|ON|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ (по формуле расстояния между двумя точками на координатной плоскости — см. § 3 гл. IV). Равенство $|OM|=|ON|$ можно получить, рассматривая треугольники MOM_1 и NON_1. Из этих же треугольников имеем: $\widehat{MOM_1}=\widehat{NON_1}$. Биссектриса OP в равнобедренном треугольнике MON является также медианой и высотой, т. е. $|MP|=|NP|$ и $[OP]\perp[MN]$, что и требовалось доказать.

§ 4. Свойства и графики некоторых простейших функций

В общем случае исследование функции $y=f(x)$ проводится по следующему плану.

1. Находят область определения функции и множество ее значений.
2. Проверяют, является ли функция четной или нечетной.
3. Находят промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства функции.
4. Определяют точки пересечения графика с осями координат и т. д.

После этого можно построить график функции. В некоторых случаях проще построить график функции, а затем по его виду выяснить свойства функции.

Линейная функция $y=kx+b$ и ее график. *Линейной* функцией называется функция вида

$$y=kx+b,$$

где k и b — заданные числа.

1) Рассмотрим частный случай, когда $k=0$. Тогда

$$y=b.$$

Эта функция задана на всей оси Ox и для каждого x принимает одно и то же значение b. Следовательно, ее график — прямая, параллельная оси Ox и отстоящая от нее на $|b|$ единиц (вверх, если $b>0$, и вниз, если $b<0$) (рис. 27). При $b=0$ графиком функции $y=0$ является прямая, совпадающая с осью Ox.

2) Если $b=0$, то $y=kx$. При $k\neq 0$ функция $y=kx$ называется *прямой пропорциональной зависимостью*. Эта функция задана всюду. Она монотонно возрастает при $k>0$ и убывает при $k<0$. Докажем монотонность функции $y=kx$.

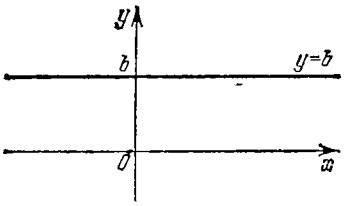


Рис. 27.

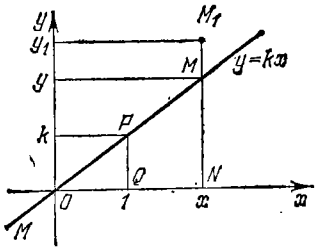


Рис. 28.

Возьмем два каких-нибудь значения x_1 и x_2. Найдем для них соответствующие значения y_1 и y_2:

$$y_1=kx_1,\ y_2=kx_2.$$

Вычитая из y_2 значение y_1, получим

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

Если $x_2>x_1$ и $k>0$, то $y_2-y_1>0$; тогда $y_2>y_1$, и функция $y=kx$ возрастает.

Если $x_2>x_1$ и $k<0$, то $y_2-y_1<0$; тогда $y_2<y_1$, и функция $y=kx$ убывает.

Следовательно, функция $y=kx$ является монотонной.

Если $x=0$, то значение функции $y=kx$ также равно нулю, следовательно, точка (0; 0) принадлежит графику функции. При $k>0$ знаки x и y совпадают, при $k<0$ знаки x и y противоположны.

Отсюда заключаем, что при $k>0$ точки графика функции $y=kx$ принадлежат первой и третьей координатным четвертям, а при $k<0$—второй и четвертой.

Докажем, что графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.

Возьмем $x=1$. Тогда $y=k$. Прямая, проходящая через точку $P(1; k)$ и начало координат $O(0; 0)$—график функции $y=kx$ (рис. 28).

В самом деле, пусть $k>0$.

Треугольники MON и POQ подобны при любом положении точки M на построенной прямой. Из подобия следует, что

$$\frac{|MN|}{|ON|}=\frac{|PQ|}{|OQ|} \text{ или } \frac{y}{x}=\frac{k}{1}, \text{ т. е. } y=kx.$$

Результат сохраняется и для любой точки M на рассматриваемой прямой, расположенной в третьей четверти (в этом слу-

чае ее расстояния от осей Ox и Oy соответственно равны $|y| = -y$ и $|x| = -x$, так как $y < 0$, $x < 0$).

Тем самым доказано, что любая точка на прямой, проходящей через точки $P(1; k)$ и $O(0; 0)$, принадлежит графику функции $y = kx$. Никакая другая точка M_1, не лежащая на этой прямой, не может принадлежать графику $y = kx$ (см. рис. 28). Если допустить, что точка $M_1(x; y_1)$ принадлежит этому графику, то должно быть $y_1 = kx$. Вместе с тем точка $M(x; y)$, полученная при пересечении прямой, проведенной из точки M_1 параллельно оси Oy, с прямой OP по доказанному принадлежит искомому графику. Значит, $y = kx$, что противоречит равенству $y_1 = kx$: их правые части равны, а левые — различны, так как $y \neq y_1$. Итак, график функции $y = kx$ есть прямая OP.

Аналогично рассматривается случай $k < 0$.

3) Общий случай: $y = kx + b$. Каждая точка графика этой функции получается сдвигом на $|b|$ единиц вдоль оси ординат (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$) соответствующей точки графика функции $y = kx$. Поэтому графиком линейной функции является прямая, параллельная прямой $y = kx$ (рис. 29).

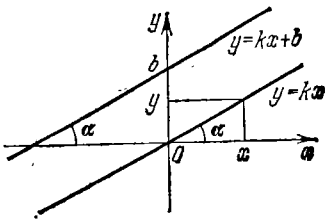


Рис. 29.

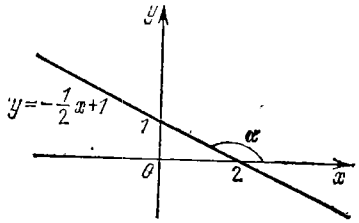


Рис. 30.

Коэффициент k называется *угловым коэффициентом* прямой $y = kx$. Этот коэффициент определяет угол наклона α этой прямой к оси Ox: $k = \operatorname{tg}\alpha$. Если $k > 0$, то угол α острый; если $k < 0$, то угол α тупой. Ордината точки пересечения прямой с осью Oy равна b.

Таким образом, расположение прямой $y = kx + b$ на координатной плоскости зависит от значений k и b.

Практически для построения графика линейной функции надо построить две точки графика, а затем провести через эти точки прямую.

Например, построим график функции $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

При $x = 0$, $y = 1$; при $y = 0$, $x = 2$. Соединяя прямой найденные точки, получаем график данной функции (рис. 30). Здесь $k = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график. Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ — заданное число, называется *обратной пропорциональной зависимостью.*

Рассмотрим случай $k > 0$:

1) функция задана всюду, кроме $x = 0$, т. е. область ее задания — интервалы $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

2) функция нечетная, так как

$$f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x),$$

следовательно, график функции $y = \frac{k}{x}$ симметричен относительно начала координат, и поэтому дальнейшее исследование проводим для $x > 0$;

3) знак y совпадает со знаком x;

4) функция убывающая, так как при $0 < x_1 < x_2$ имеем

$$\frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0 \quad (k > 0)$$

(очевидно, что при $k > 0$ функция убывает и на интервале $(-\infty; 0)$).

Используя эти свойства, строим график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ (рис. 31).

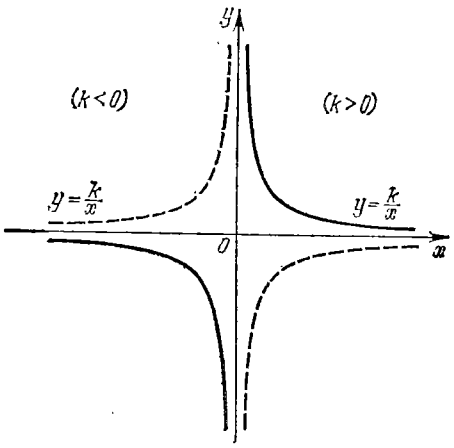


Рис. 31.

Полученная кривая называется *гиперболой*. Она состоит из двух ветвей, расположенных в первой и третьей координатных четвертях (квадрантах). Аналогично доказывается, что в случае $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ является монотонной: она возрастает на каждом из интервалов $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. График также называется гиперболой. Ее ветви расположены во второй и четвертой координатных четвертях (см. рис. 31).

Таким образом, графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ является гипербола, расположение которой на координатной плоскости зависит от значений k. Например, на рис. 32 изображены гиперболы $y = -\frac{1}{x}$ и $y = -\frac{2}{x}$. Начало координат — центр симметрии этих гипербол.

Квадратный трехчлен и его график. Квадратным трехчленом называется функция вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c — заданные числа и $a \neq 0$. Иногда функцию $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называют *квадратичной* функцией.

Мы уже встречались с квадратными трехчленами при решении квадратных уравнений и неравенств, а также при разложе-

причем один четырехугольник будет самопересекающимся. При $b=|c\sin\beta-a\sin\alpha|$ решение единственно, а при $b<|c\sin\beta-a\sin\alpha|$ искомый четырехугольник не существует.

2.12. На отрезке OM (рис. Р.2.12) строим треугольник OCM, сторона OC которого равна $2R$, а сторона CM равна R. Точку пересечения OC с окружностью обозначим через B. Секущая AM искомая.

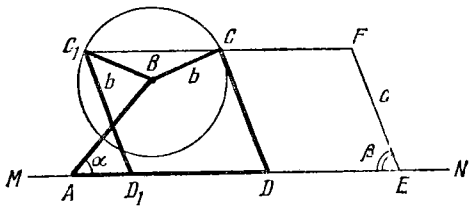


Рис. Р.2.11.

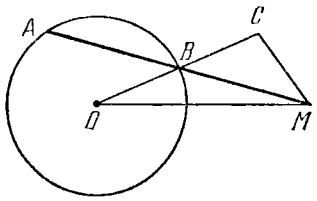


Рис. Р.2.12.

Задача имеет два решения, если $MO<3R$, одно решение, если $MO=3R$, и не имеет решения, если $MO>3R$.

2.13. Соединим центры O и O_1 данных окружностей и построим на OO_1, как на гипотенузе, прямоугольный треугольник OEO_1, один из катетов которого (EO_1) равен $a/2$. Через точку M пересечения окружностей, лежащую по ту же сторону от OO_1, что и построенный прямоугольный треугольник, проводим прямую, параллельную катету длины $a/2$. Отрезок AB (рис. Р.2.13) будет искомым.

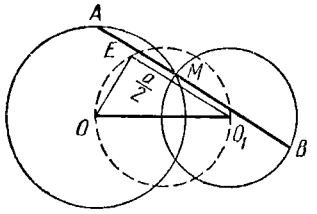


Рис. Р.2.13.

Задача имеет четыре решения, если $a/2<OO_1$, два решения, если $a/2=OO_1$, и не имеет решений, если $a/2>OO_1$.

2.14. Проводим через точку M окружность, концентрическую данной. На этой окружности строим хорду длины a, проходящую через точку M. Задача может иметь два или одно решение ($a\leqslant 2MO$), а может и не иметь решения вовсе ($a>2MO$).

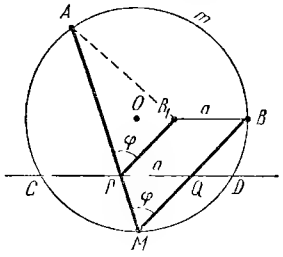


Рис. Р.2.15.

2.15. Так как дуга AmB фиксирована, то известен и вписанный угол AMB. Обозначим его через φ. Если отрезок PQ (рис. Р.2.15) перенести параллельно в отрезок B_1B, то из точки P отрезок AB_1 будет виден под углом φ. Таким образом, строим отрезок B_1B, равный a и параллельный CD; на отрезке AB_1 строим сегмент, вмещающий угол φ, где φ — угол, измеряемый дугой AmB данной окружности. Искомая точка P есть точка пересечения или касания дуги этого сегмента с прямой CD.

Задача может иметь два решения (сегмент, опирающийся на AB_1, пересекает хорду CD), одно решение (этот сегмент касается хорды) и может не иметь решений вовсе (точек пересечения нет).

2.16. Пусть отрезок FD делится точкой M пополам (рис. Р.2.16). Отразим точку B от точки M. Получим точку E. Отрезки FD и EB можно рассматривать как диагонали параллелограмма.

Заметим также, что угол ACB известен, так как точки A и B зафиксированы на окружности; обозначим его через φ. Угол AFE равен $\pi-\varphi$. Следовательно, точка F обладает еще и тем свойством, что из нее отрезок AE виден под данным углом $\pi-\varphi$.

Итак, строим точку E, а на отрезке AE — сегмент, вмещающий угол $\pi-\varphi$. На пересечении дуги этого сегмента с данной прямой получим точку F.

Задача имеет единственное решение, если точки A и B лежат по одну сторону от данной прямой, и не имеет решения в остальных случаях.

2.17. Пусть прямая, проведенная через точки A и B, пересекает прямую PQ в точке C (рис. Р.2.17) и пусть O — центр искомой окружности. Тогда $CA\cdot CB=CD^2$. Отрезки CA и CB известны, отрезок CD — их среднее геометрическое и строится стандартным образом.

Если точки A и B лежат по одну сторону от PQ, то задача имеет два решения (отрезок CD можно отложить вправо и влево от точки C). Если AB и

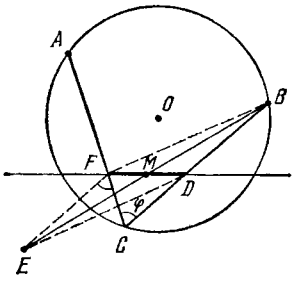


Рис. Р.2.16.

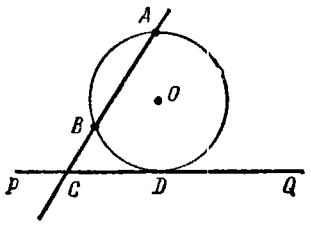


Рис. Р.2.17.

PQ параллельны, то задача имеет единственное решение, которое очевидно, но не может быть получено описанным способом. Когда точки A и P лежат по разные стороны PQ, задача не имеет решения.

2.18. Отрезки MB и MA или их продолжения пересекают данную окружность в точках C и D (рис. Р.2.18), которые являются основаниями высот треугольника AMB, опущенных из его вершин A и B. Отрезок MP, проведенный через точку P пересечения AC и BD, будет искомым перпендикуляром.

Задача имеет решение, если точка M не лежит на прямой AB.

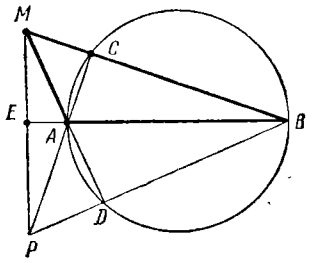


Рис. Р.2.18.

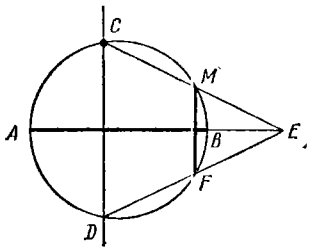


Рис. Р.2.19.

2.19. Предыдущая задача позволяет построить некоторый перпендикуляр к диаметру AB, пересекающий данную окружность в точках, которые мы обозначим буквами C и D (рис. Р.2.19). Проведем прямую CM; она пересечет диаметр AB (или его продолжение) в точке E. Проведем ED. В пересечении ED и данной окружности получим точку F; MF — искомый перпендикуляр.

2.20. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой l (рис. Р.2.20). Для любой точки C на прямой l (в силу неравенства треугольника)

справедливо соотношение

$$|AC-BC|=|A_1C-BC|\leqslant A_1B.$$

Величина $|A_1C-BC|$ будет меняться, в зависимости от положения точки C, и станет наибольшей, когда точка C займет положение C_1 (на пересечении прямых A_1B и l). Именно для этой точки треугольник CA_1B вырождается в отрезок C_1B, а неравенство треугольника превращается в равенство: $|A_1C-BC|=A_1B$. Из построения следует, что точка C единственная (если бы мы отражали от прямой l точку B, то пришли бы к той же точке C).

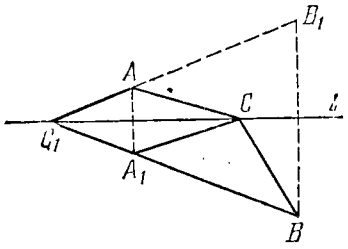


Рис. Р.2.20.

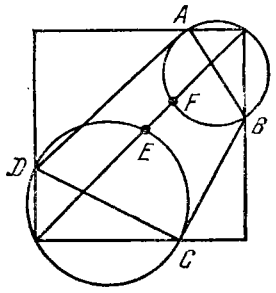


Рис. Р.2.21.

2.21. Две противоположные вершины искомого квадрата лежат, во-первых, на внешних полуокружностях, построенных на сторонах данного четырехугольника (рис. Р.2.21), и, во-вторых, на диагонали квадрата, которая пересекает внутренние полуокружности в точках E и F таких, что $AF=FB=DE=EC=45°$.

После проведенного анализа построение очевидно.

Глава 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. На луче, перпендикулярном к MN, возьмем произвольную точку A (рис. Р.3.1). Спроектируем OA на плоскость P, а полученный отрезок OB — на второй из данных лучей. Треугольник ACO прямоугольный (по теореме о трех перпендикулярах).

Косинус искомого угла AOC равен $\frac{OC}{OA}$. Используя построенные треугольники, можно выразить OC через OA:

$$OC=OB\sin\beta=OA\cos\alpha\sin\beta.$$

Ответ. $\arccos(\cos\alpha\sin\beta)$.

3.2. Спроектируем данный треугольник ABC на плоскость P (рис. Р.3.2) и построим угол CED, равный x, между плоскостью треугольника и плоскостью P. Введем в рассмотрение линейный элемент $CD=a$. Тогда

$$AC=\frac{a}{\sin\alpha},\quad BC=\frac{a}{\sin\beta},\quad CE=\frac{a}{\sin x}.$$

Так как CE — высота в треугольнике ABC, опущенная на гипотенузу, то

(из сравнения площадей) имеем

$$AC \cdot EC = CE \cdot AB = CE \sqrt{AC^2 + BC^2}.$$

Подставляя вычисленные ранее значения AC, BC и CE, получим

$$\frac{a}{\sin\alpha} \cdot \frac{a}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin x} \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2\alpha} + \frac{a^2}{\sin^2\beta}},$$

откуда

$$\sin x = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}.$$

Так как угол x по построению всегда острый, то он определяется однозначно.

Ответ. $\arcsin \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.

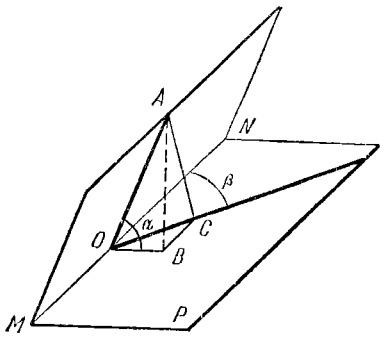


Рис. Р 3.1.

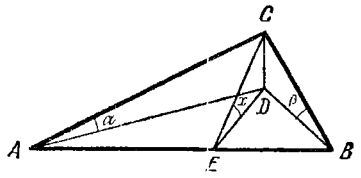


Рис. Р.3.2.

3.3. Из некоторой точки B_1 на стороне угла α опустим перпендикуляр B_1B на плоскость P (рис. Р.3.3). Через B_1 проведем плоскость, параллельную плоскости P. Она пересечет другую сторону угла α в некоторой точке A_1. Через B_1B и A проведем плоскость, которая будет перпендикулярна к плоскости P.

Отрезки AA_1 и BB_1 равны. Обозначим $AA_1 = BB_1 = a$. Теперь можно вычислить все стороны треугольника OAB и воспользоваться теоремой косинусов, чтобы найти угол x.

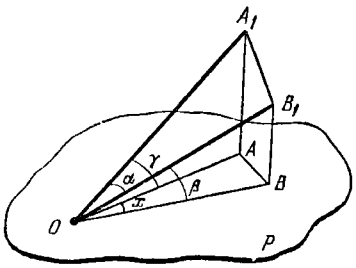


Рис. Р.3.3.

Стороны OA и OB вычислить просто:

$$OA = a \operatorname{ctg}\gamma, \quad OB = a \operatorname{ctg}\beta.$$

Сторона AB равна A_1B_1 в треугольнике OA_1B_1. Так как

$$OA_1 = \frac{a}{\sin\gamma}, \text{ а } OB_1 = \frac{a}{\sin\beta},$$

то по теореме косинусов

$$AB^2 = A_1B_1^2 = \frac{a^2}{\sin^2\beta} + \frac{a^2}{\sin^2\gamma} - 2\frac{a^2}{\sin\beta\sin\gamma}\cos\alpha.$$

Воспользуемся теоремой косинусов еще раз, но уже для треугольника OAB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos x.$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для OA, OB и AB, получим уравнение относительно $\cos x$. Решая его, после несложных тригонометрических преобразований найдем $\cos x$.

Ответ. $\dfrac{\cos\alpha - \sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}$.

3.4. Построим плоскость P, перпендикулярную к прямой a, и спроектируем на нее прямые b, c и d. Искомая прямая параллельна a, т. е. должна спроекти-

роваться в точку O на плоскости P. Точка O будет одинаково удалена от проекций b_1, c_1 и d_1 трех этих прямых.

Поскольку прямые a, b, c и d скрещивающиеся, ни одна из прямых b, c и d не может спроектироваться в точку на плоскости P, так как иначе она оказалась бы параллельной прямой a.

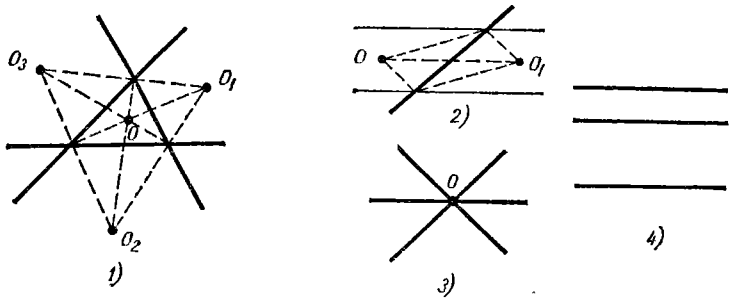


Рис. Р.3.4а.

Проекции никаких двух прямых из b, c, d не сольются, так как это означало бы, что эти две прямые лежат в одной плоскости. Поэтому проекции b_1, c_1 и d_1 могут расположиться на плоскости P лишь одним из четырех способов (рис. Р.3.4а).

В первом случае (проекции образуют треугольник) мы получим четыре точки, равноотстоящие от b_1, c_1 и d_1. Это — центры вписанной и вневписанных окружностей. Проводя через каждую из них прямую, перпендикулярную к плоскости P, придем к четырем решениям.

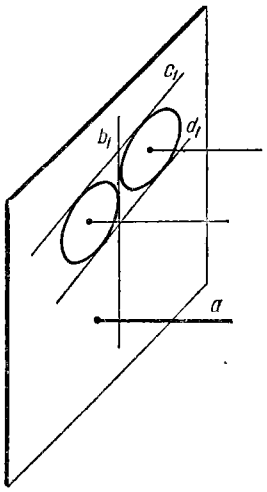


Рис. Р.3.4б.

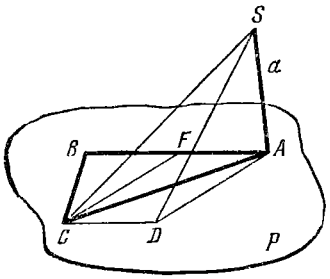


Рис. Р.3.5.

Во втором случае (две из проекций параллельны), получим два решения (рис. Р.3.4б).

В третьем случае (проекции пересекаются в одной точке) будет единственное решение — прямая, проходящая через общую для трех проекций точку.

В последнем случае (проекции b_1, c_1 и d_1 параллельны) решения нет.

Так как все возможные случаи исчерпаны, то задача решена.

3.5. Проведем CD параллельно AB (рис. Р.3.5). Угол SCD искомый. Построим $CF \perp AB$ и $AD \perp AB$. В прямоугольнике $AFCD$ имеем $CD = AF = a\sqrt{2}$,

$AD=CF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из треугольника SAD находим $SD=\sqrt{a^2+\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{7}}{2}$. Тангенс угла SCD равен $SD:CD$.

Ответ. $\sqrt{7}$.

3.6. Если $OK=\frac{1}{2}AB=OA$, то треугольники OAM и OKM (рис. Р.3.6) равны. Таким образом, условие $OK=OA$ равносильно условию $AM=KM$ и (совершенно аналогично) условию $BP=KP$.

Отрезок OK входит в оба треугольника OKM и OKP:

$$OK^2=OM^2-m^2, \quad OK^2=OP^2-l^2, \quad \text{т. е.} \quad OM^2-m^2=OP^2-l^2$$

(через m и l обозначены длины отрезков MK и KP соответственно).

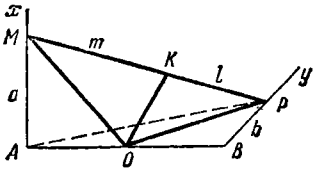


Рис. Р.3.6.

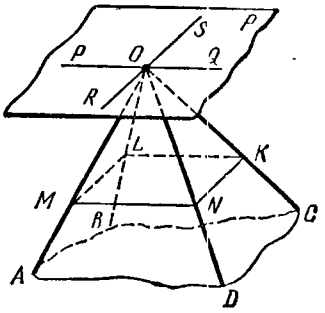


Рис. Р.3.7.

Так как $OM^2=a^2+AO^2$, а $OP^2=b^2+OB^2$ и $AO=OB$, то

$$a^2-m^2=b^2-l^2$$

или

$$m^2-l^2=a^2-b^2. \tag{1}$$

Точно так же приравняем выражения для отрезка AP^2, полученные из треугольников MAP и ABP:

$$(m+l)^2-a^2=b^2+AB^2.$$

Вспомнив, что по условию $AB^2=2ab$, получим $(m+l)^2=a^2+2ab+b^2$, т. е.

$$m+l=a+b. \tag{2}$$

Разделив почленно равенство (1) на равенство (2), получим

$$m-l=a-b, \tag{3}$$

а решая систему из уравнений (2) и (3), найдем $m=a$, $b=l$, что и требовалось доказать.

3.7. Обозначим через PQ (рис. Р.3.7) прямую, по которой пересекаются грани AOD и BOC, а через RS — прямую, по которой пересекаются грани AOB и DOC. Прямые PQ и RS определяют плоскость P. Через произвольную точку M на AO проведем плоскость, параллельную плоскости P. Фигура $MNKL$, получившаяся в сечении, будет параллелограммом.

В самом деле, $MN \parallel PQ$ и $LK \parallel PQ$, а $ML \parallel RS$ и $NK \parallel RS$, как прямые, получившиеся в результате пересечения двух параллельных плоскостей третьей. Следовательно, $MN \parallel LK$ и $ML \parallel NK$, что и требовалось доказать.

3.8. Продолжим ED и CB (рис. Р.3.8) до пересечения в точке F и проведем AF — ребро двугранного угла, косинус которого нужно найти.

Так как $EC=2DB$ (по условию), то DB — средняя линия в треугольнике EFC. Поэтому $FB=BC=a$. Поскольку $BA=a$, то треугольник FBA равнобедренный. Сумма его углов, прилежащих к FA, равна 60°, а угол BAF равен 30°.

Мы убедились в том, что угол CAF прямой, а следовательно, линейный угол EAC измеряет искомый двугранный угол. Теперь остаются простые вычисления:

$$EA=\sqrt{EC^2+AC^2}=a\sqrt{3},$$

$$\cos\angle EAC=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

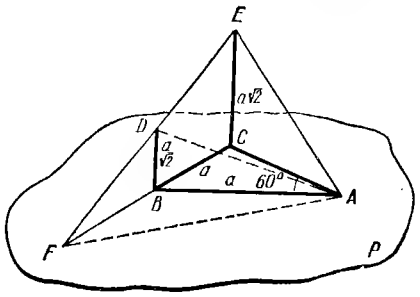


Рис. Р.3.8.

По теореме о трех перпендикулярах отрезки EA и FA взаимно перпендикулярны; поэтому площадь треугольника EAF равна $\frac{1}{2}EA\cdot AF$, где $AF=a\sqrt{3}$. Итак, площадь треугольника EAF равна $3a^2/2$, и вследствие того, что $FD=DE$, площадь треугольника DEA в два раза меньше.

Ответ. $3a^2/4$, $1/\sqrt{3}$.

3.9. Обозначим высоту SO пирамиды через H. Предположим, что вершина пирамиды спроектируется в точку O, лежащую внутри треугольника ABC, и пусть углы SDO, SEO и SFO измеряют данные двугранные углы (рис. Р.3.9, *а*).

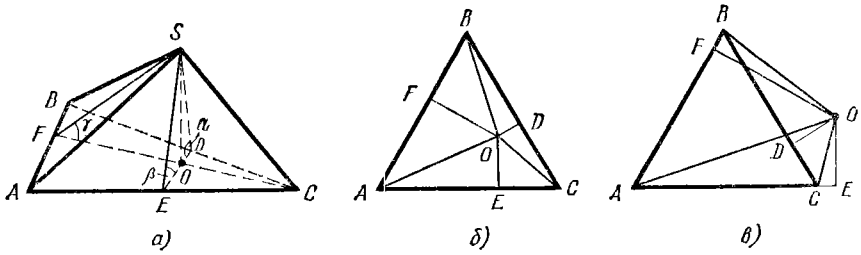


Рис. Р.3.9.

Рассмотрим отдельно треугольник ABC (рис. Р.3.9, *б*). Площадь его, с одной стороны, равна сумме площадей треугольников AOB, BOC и COA, а с другой стороны, равна $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$. Поэтому

$$\frac{1}{2}a(OF+OD+OE)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

т. е.

$$OF+OD+OE=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Каждый из отрезков OF, OD и OE можно выразить через H:

$$OD=H\operatorname{ctg}\alpha,\quad OE=H\operatorname{ctg}\beta,\quad OF=H\operatorname{ctg}\gamma.$$

Следовательно,

$$H=\frac{a\sqrt{3}}{2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}.$$

Если точка O лежит вне треугольника ABC, то один из данных двугранных углов тупой (на рис. Р.3.9, *в* угол при BC, т. е. α). Следовательно, его котангенс будет отрицательным. Это соответствует тому факту, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABO и AOC за вычетом площади треугольника BOC. Таким образом, результат останется таким же, как в случае, когда O лежит внутри треугольника ABC.

Наконец, как легко убедиться, полученная формула дает верный результат и в том случае, когда точка O лежит на стороне треугольника ABC или совпадает с его вершиной. (Соответствующие котангенсы обращаются в нуль.)

Ответ. $V=\dfrac{a^3}{8(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}$.

3.10. Так как $AC=BC$ по условию (рис. Р.3.10), то прямоугольные треугольники ADC и BDC равны и, следовательно, $AD=BD$. Треугольник ADB — равнобедренный, его медиана DE, проведенная из вершины D, будет одновременно и высотой. Таким образом, мы доказали, что двугранный угол при ребре AB измеряется линейным углом DEC, который обозначим через x.

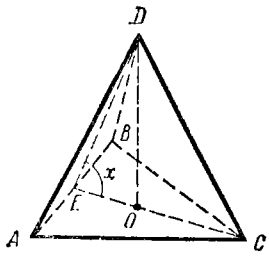


Рис. Р.3.10.

Высота DO треугольника EDC будет высотой пирамиды. В самом деле, ребро AB перпендикулярно к ED и EO, т. е. к плоскости EDC. Отрезок DO, следовательно, перпендикулярен не только к EC, но и к AB, т. е. перпендикулярен к плоскости ABC.

Заметим также, что CD — перпендикуляр к плоскости ADB, а поэтому треугольник EDC прямоугольный с прямым углом при вершине D.

Мы знаем, что $V=\frac{1}{3}S\cdot OD$. Отрезок OD равен $ED\sin x$, а отрезок ED в свою очередь равен $EC\cos x$, т. е. $\dfrac{2S}{a}\cos x$.

Итак,

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\frac{2S}{a}\cos x\sin x,$$

откуда $\sin 2x=\dfrac{3Va}{S^2}$.

Чтобы найти x, заметим, что угол x острый.

Ответ. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3aV}{S^2}$.

3.11. Так как площадь основания равна $\sqrt{3}$, то сторона основания равна 2. Из треугольника AOS (рис. Р.3.11) находим $AO=b\cos x$; с другой стороны,

$$AO=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{a}{\sqrt{3}}=b\cos x.$$

Из треугольника CDS находим $CD=a/2=b\sin 2x$. Разделив второе соотношение на первое, получим

$$\sin x=\sqrt{3}/4.$$

Так как $SD=\frac{a}{2}\operatorname{ctg} 2x$, то нужно вычислить $\operatorname{ctg} 2x$:

$$\operatorname{ctg} x=\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}=\sqrt{\frac{16}{3}-1}=\sqrt{\frac{13}{3}},\quad \operatorname{ctg} 2x=5/\sqrt{39}.$$

Следовательно, $SD=5/\sqrt{39}$, а площадь боковой поверхности равна $\frac{3}{2}a\cdot SD$.

Ответ. $15/\sqrt{39}$.

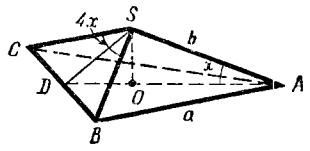


Рис. Р.3.11.

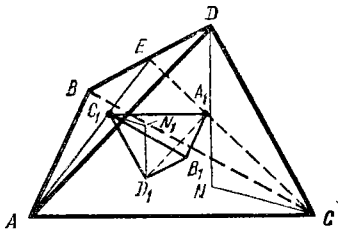


Рис. Р.3.12.

3.12. На рис. Р.3.12 треугольники AEC и C_1EA_1 подобны, так как медианы AE и CE делятся точками C_1 и A_1 в одинаковом отношении 2:1. Поэтому $C_1A_1=\frac{1}{3}AC$. Аналогично доказывается, что $B_1A_1=\frac{1}{3}AB$ и $C_1B_1=\frac{1}{3}BC$ и т. д., т. е. площади S_1 и S оснований пирамиды относятся, как 1:9. Подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в параллельных плоскостях, так как их стороны параллельны. Следовательно, высоты DN и D_1N_1, проведенные в тетраэдрах, параллельны и прямоугольные треугольники DNC и $D_1N_1C_1$ подобны, т. е. $D_1N_1=\frac{1}{3}DN$. Остается сравнить объемы

$$\frac{V_1}{V}=\frac{S_1\cdot D_1N_1}{S\cdot DN},$$

Ответ. 1/27.

3.13. Пусть O_1, O_2 и O_3 — точки пересечения медиан соответствующих граней (на рис. Р.3.13 изображены лишь O_1 и O_2), O — центр шара. Прямоугольные треугольники SO_1O, SO_2O и SO_3O равны ($O_1O=O_2O=O_3O$, OS — общая гипотенуза). Следовательно, $SO_1=SO_2=SO_3$, и поэтому $SB_1=SB_2=SB_3$.

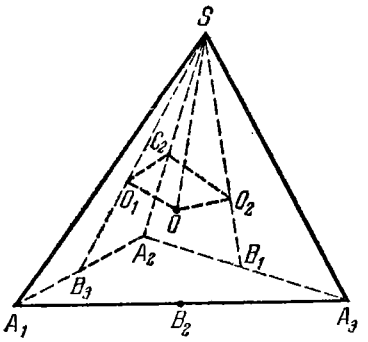


Рис. Р.3.13.

Докажем теперь, что треугольник $A_1A_2A_3$ правильный. Для этого достаточно установить равенство треугольников A_2SB_1 и A_2SB_3, т. е. любых соседних из шести таких треугольников. Установим в них равенство углов при вершине S. Пусть C_2 — точка пересечения плоскости O_1OO_2 с ребром SA_2. Прямоугольные треугольники O_1SC_2 и O_2SC_2 тоже равны. Отсюда углы O_1SC_2 и O_2SC_2 равны и, следовательно, равны треугольники B_1SA_2 и B_3SA_2. Таким образом, $B_1A_2=B_3A_2$, т. е. $A_2A_3=A_1A_2$. Итак, в основании пирамиды лежит правильный треугольник.

Из равенства треугольников B_1SA_2 и B_3SA_2 следует также равенство треугольников A_1SA_2 и A_2SA_3, т. е. равенство всех боковых ребер. Это означает, что вершина S проектируется в центр основания $A_1A_2A_3$. Тем самым доказано, что пирамида правильная.

3.14. Достроим пирамиду до полной. Все параллельные сечения пирамиды подобны. Составим схематический рис. Р.3.14, на котором A и B — стороны квадратов, равновеликих основаниям, M — сторона квадрата, равновеликого сечению, проходящему через середину высоты данной усеченной пирамиды. Последнее условие мы запишем так:

$$H-h_2=\frac{H-h_1}{2},\quad \text{т. е. } h_2=\frac{H+h_1}{2}.$$

Из подобия треугольников, изображенных на рис. Р.3.14, следует, что

$$\frac{A}{B}=\frac{H}{h_1},\qquad \frac{M}{B}=\frac{h_2}{h_1},$$

откуда

$$A=\frac{H}{h_1}B,\quad M=\frac{h_2}{h_1}B.$$

Составим среднее арифметическое величин A и B:

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\frac{H}{h_1}B+B}{2}=\frac{H+h_1}{2h_1}B=\frac{h_2}{h_1}B=M,$$

что и требовалось доказать.

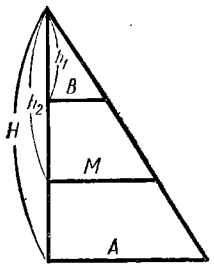


Рис. Р.3.14.

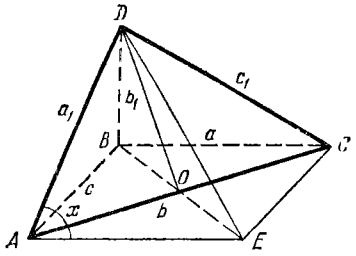


Рис. Р.3.15.

3.15. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCE$ (рис. Р.3.15). Угол DAE равен углу между AD и BC. Обозначим его через x.

В треугольнике DAE

$$AD=a_1,\quad AE=a.$$

Вычислим DE. Так как в дальнейшем мы воспользуемся теоремой косинусов, то удобнее находить DE^2.

Отрезок DO является медианой в треугольниках ADC и BDE:

$$4\,OD^2=2a_1^2+2c_1^2-b^2,$$
$$4\,OD^2=2b_1^2+2\,DE^2-BE^2.$$

Чтобы найти DE^2, достаточно вычислить BE^2. Но BE — диагональ параллелограмма $ABCE$, т. е. $BE^2=2a^2+2c^2-b^2$. Следовательно,

$$DE^2=a_1^2+c_1^2-b_1^2+a^2+c^2-b^2.$$

Применим к треугольнику ADE теорему косинусов:

$$DE^2=a_1^2+a^2-2aa_1\cos x.$$

Приравнивая два выражения для DE^2, найдем $\cos x$. При этом следует иметь в виду, что, по определению угла между скрещивающимися прямыми, x — острый угол.

Ответ. $\dfrac{|b^2+b_1^2-c^2-c_1^2|}{2aa_1}$.

3.16. Плоскость ABE (рис. Р.3.16) делит тетраэдр на две пирамиды $SABE$ и $CABE$ с общим основанием ABE. Так как отношение объемов дано, а основание

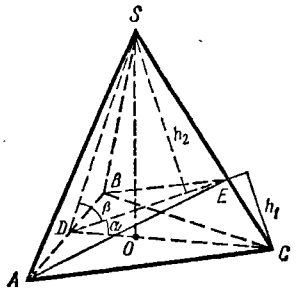


Рис. Р.3.16.

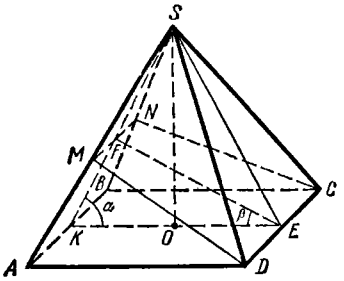


Рис. Р.3.17.

у пирамиды общее, то $h_2:h_1=5:3$; в силу же равенства $SD=CD$ имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{3}{5}, \quad \text{т. е. } \sin\alpha=\frac{3}{5}\sin\beta.$$

Кроме того, так как тетраэдр правильный, углы α и β образуют угол SDO, косинус которого равен 1/3. Поэтому

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=1/3.$$

Выразив в этом уравнении $\sin\beta$ и $\cos\beta$ через $\sin\alpha$ (так как пирамида правильная, углы α и β острые), получим

$$\sqrt{1-\frac{25}{9}y}\sqrt{1-y}=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}y,$$

где $y=\sin^2\alpha$.

Возведем в квадрат и раскроем скобки; найдем $y=\dfrac{2}{11}$ и вычислим $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}=\frac{1}{\sqrt{9/2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Поскольку $\sin^2\beta=\dfrac{25}{9}\sin^2\alpha=\dfrac{50}{99}$, то аналогично найдем $\operatorname{tg}\beta$.

Ответ. $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

3.17. Треугольники DAM и DMS (рис. Р.3.17) имеют общую высоту, проведенную из вершины D. Поэтому отношение их площадей равно отношению оснований AM и MS.

Из подобия треугольников MSF и ASK следует, что

$$AM:MS=KF:FS.$$

Отрезки KF и FS выразим через KE. По теореме синусов для треугольника KFE имеем

$$KF=KE\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

Так как $KS=\dfrac{KE}{2\cos\alpha}$, то

$$FS=KS-KF=\frac{KE}{2\cos\alpha}-KE\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=KE\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}$$

(впрочем, это можно установить и непосредственно из треугольника EFS).

Остается найти отношение $KF:FS$.

Ответ. $\dfrac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$.

3.18. По условию высота DO пирамиды проходит через точку пересечения высот основания. Поэтому, соединив точку O с вершиной C и продолжив до пересечения с AB, получим отрезок CE, являющийся высотой треугольника ABC, опущенной на сторону AB (рис. Р.3.18). Прямая AB перпендикулярна к DO и EC, следовательно, прямые AB и CD тоже перпендикулярны друг другу. Таким образом, прямая CD перпендикулярна к двум прямым BD и AB плоскости ABD, а потому перпендикулярна к прямой AD. Мы доказали, что угол ADC прямой. Аналогично доказывается, что прямые BD и AD тоже перпендикулярны.

Теперь нетрудно ответить на вопрос задачи: площадь треугольника ADB равна $\dfrac{1}{2}b\cdot AD$, а площадь треугольника ADC равна $\dfrac{1}{2}c\cdot AD$. Отношение площадей равно отношению неравных катетов.

Ответ. b/c.

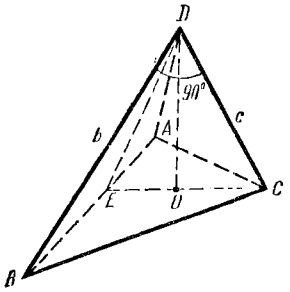


Рис. Р.3.18.

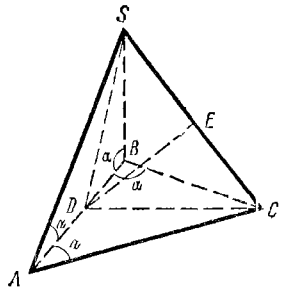


Рис. Р.3.19.

3.19. Объем пирамиды $SABC$ (рис. Р.3.19) равен удвоенному объему пирамиды с основанием DSC и высотой AD. Так как $AD=a/2$, то этот объем равен $Sa/6$, а объем всей пирамиды равен $Sa/3$, где через S обозначена площадь SDC.

Проведем высоту DE и вычислим EC и DE.

Треугольник CAS равнобедренный ($AS=AC$), поэтому

$$EC=AC\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2\cos\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $DC=\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, то

$$DE=\sqrt{DC^2-EC^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{a^2\sin^2(\alpha/2)}{4\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{a\sin(\alpha/2)}{2\cos\alpha}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}=\frac{a\sin(\alpha/2)}{2\cos\alpha}\sqrt{1+2\cos\alpha}.$$

Остается вычислить объем:

$$V=\frac{OS}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot DE\cdot EC.$$

Ответ: $\dfrac{a^3}{12\cos^2\alpha}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

3.20. Рассмотрим два случая:

$$\alpha\leqslant\pi/2,\qquad \alpha>\pi/2.$$

Если угол α не тупой, то (рис. Р.3.20, *а*) $CD=SD=\dfrac{AB}{2}$. Пусть SO — высота пирамиды, SD и SE — высоты в треугольниках ASB и CSB. Из треугольника SOD

$$OS=SD\sin\alpha=\frac{AB}{2}\sin\alpha,\quad OD=\frac{AB}{2}\cos\alpha.$$

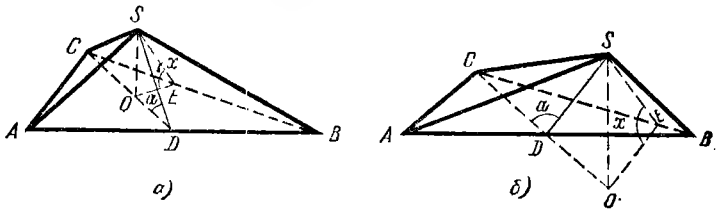


Рис. Р.3.20.

В треугольнике COE угол OEC прямой, а угол OCE равен 45°. Поэтому

$$OE=\frac{OC}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(CD-OD)=\frac{AB}{2\sqrt{2}}(1-\cos\alpha),$$

Теперь можно найти тангенс искомого угла:

$$\operatorname{tg}x=\frac{OS}{OE}=\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Если угол α тупой, то (рис. Р.3.20, *б*) снова получим $CD=SD=\dfrac{AB}{2}$. Высота OS равна

$$OS=SD\sin(\pi-\alpha)=\frac{AB}{2}\sin\alpha,$$

отрезок OD равен

$$OD=SD\cos(\pi-\alpha)=-\frac{AB}{2}\cos\alpha$$

(угол α тупой и $\cos\alpha<0$). Треугольник COE тоже прямоугольный и равнобедренный. Поэтому

$$OE=\frac{CO}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(CD+OD)=\frac{AB}{2\sqrt{2}}(1-\cos\alpha).$$

Так как для OE и OS получились такие же значения, как в первом случае, то и окончательный результат не изменится.

Ответ. $x=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

3.21. Проведем в треугольнике ABC (рис. Р.3.21) высоту BD и соединим точку D с вершиной S пирамиды. Так как ребро SB образует равные углы с ребрами SC и SA, то SD — биссектриса угла ASC.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD. В нем

$$AD = SA \cdot \operatorname{tg}(\alpha/4), \quad AB = SA \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \cos x = \frac{AD}{AB} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha/4)}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Так как α — угол прямоугольного треугольника, то $0 < \alpha < \pi/2$, а потому $\operatorname{tg}(\alpha/4) < \operatorname{tg}\alpha$ и правая часть уравнения меньше единицы.

Ответ. $x = \arccos \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha/4)}{\operatorname{tg}\alpha}$.

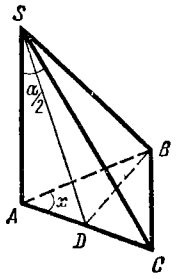


Рис. Р.3.21.

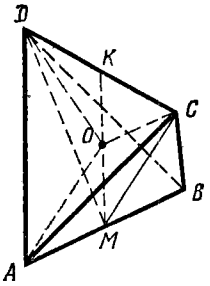


Рис. Р.3.22.

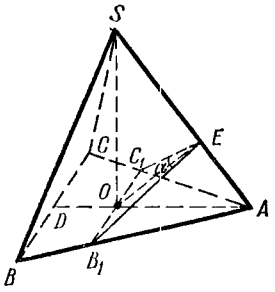


Рис. Р.3.23.

3.22. Пусть M — середина AB. Тогда медианы CM и DM (рис. Р.3.22) являются одновременно высотами в равнобедренных треугольниках ABC и ABD. Следовательно, прямая AB перпендикулярна к плоскости CMD, а потому и к прямой CD, лежащей в этой плоскости. Треугольник CMD равнобедренный, так как CM и MD — медианы, проведенные к общей стороне в равных треугольниках. Следовательно, его высота MK будет одновременно и медианой. Итак, отрезок KM, соединяющий середины AB и CD, есть общий перпендикуляр к этим ребрам. Поэтому центр описанного около тетраэдра $ABCD$ шара должен лежать на этом отрезке.

Из треугольников MDB и MDK последовательно находим $MD = \sqrt{65}$, $MK = 7$. С другой стороны, из треугольников OKD и AMO находим $MK = KO + MO = \sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 9}$. Получаем уравнение $\sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 9} = 7$.

Ответ. $R = 5$.

3.23. Проведем через точку O (рис. Р.3.23) сечение B_1EC_1 пирамиды, перпендикулярное к стороне SA. Тогда угол B_1EC_1 равен α, а $OE = a$.

Так как пирамида правильная, то в силу симметрии треугольник B_1EC_1 равнобедренный, а B_1C_1 и BC параллельны.

Чтобы связать высоту SO с элементами треугольника B_1EC_1, рассмотрим треугольник SOA, для которого воспользуемся сравнением площадей:

$$SO \cdot OA = OE \cdot SA. \tag{1}$$

Выразим все участвующие в этом соотношении отрезки через a, α и h:

$$SO = h; \qquad OE = a; \qquad OA = OC_1 \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}\, a \operatorname{tg}(\alpha/2);$$
$$AS = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + 3a^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}.$$

Подставив в уравнение (1) и возведя затем обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$3h^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2) - h^2 = 3a^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2),$$

откуда

$$h=\frac{\sqrt{3}\,a\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}{\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2(\alpha/2)-1}}.$$

Чтобы привести это выражение к виду, удобному для логарифмирования, преобразуем выражение, стоящее в знаменателе под радикалом:

$$3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1=3\left[\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]=3\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=3\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}\,a\sin(\alpha/2)}{2\sqrt{\sin(\alpha/2-\pi/6)\sin(\alpha/2+\pi/6)}}$.

3.24. Если в сечении образуется квадрат, то плоскость сечения пересекает все четыре грани пирамиды. Кроме того, отрезок KL параллелен MN, т. е. параллелен плоскости основания, а следовательно, и ребру AB.

Аналогично отрезки KM и LN параллельны ребру DC. Итак, если в сечении пирамиды — квадрат, то плоскость сечения должна быть параллельной двум скрещивающимся прямым, на которых лежат ребра AB и DC.

Докажем обратное: если провести сечение пирамиды, плоскость которого параллельна AB и DC, то в сечении получится прямоугольник. В самом деле, то, что это будет параллелограмм, устанавливается непосредственно. Спроектировав DC на плоскость основания (рис. Р.3.24), мы убедимся в том, что MN и EC взаимно перпендикулярны. Отсюда следует, что прямым будет угол между DC и MN, а значит, и между LN и MN. Таким образом, $KLMN$ — прямоугольник.

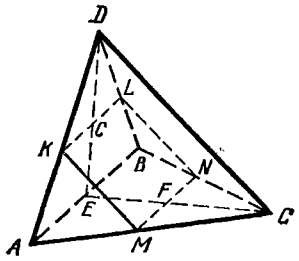


Рис. Р.3.24.

Мы доказали, что в сечении можно получить прямоугольник только с помощью плоскости, параллельной двум скрещивающимся ребрам.

Этот прямоугольник будет квадратом, если $MN=MK$. Из подобия треугольников ADC и AMK находим $\dfrac{MK}{CD}=\dfrac{AM}{AC}$, причем $CD=\sqrt{EC^2+DE^2}=\sqrt{b^2+a^2/2}$, $AM=a-MC=a-MN$.

Подставляя в первоначальное отношение, получим

$$\frac{MK}{\sqrt{b^2+a^2/2}}=\frac{a-MN}{a}.$$

Так как $MK=MN$, то получим уравнение относительно стороны квадрата, из которого

$$MN=\frac{a\sqrt{b^2+a^2/2}}{\sqrt{b^2+a^2/2}+a}.$$

Ответ. $\dfrac{a\sqrt{2b^2+a^2}}{\sqrt{2b^2+a^2}+a\sqrt{2}}$.

3.25. Расположим пирамиду так, как показано на рис. Р.3.25. Соединим вершину R_1 куба с вершинами пирамиды. Пирамида $ABCP$ разобьется на три пирамиды: R_1ABP, R_1ACP, R_1BCP, у которых общая вершина R_1 и одинаковая высота x, равная по длине ребру куба. Из сравнения объемов получим

$$\frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}(xab + xbc + xac),$$

откуда найдем x.

Ответ. $\dfrac{abc}{ab + bc + ac}$.

3.26. Верхнее основание куба будет вписано в равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. Р.3.26) подобный основанию ABC пирамиды. Выразим сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ через сторону вписанного квадрата:

$$A_1C_1 = 2A_1E_1 + a = 2a\operatorname{ctg}60^\circ + a = a(1 + 2/\sqrt{3}).$$

Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ тогда равна $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+2)^2\sqrt{3}}{12}$. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и расстояние первого от центра подобия

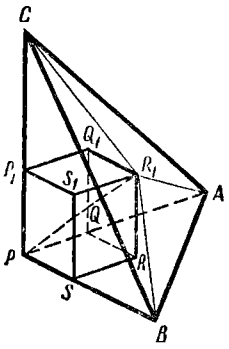


Рис. Р.3.25.

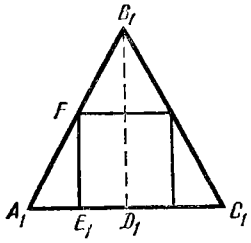


Рис. Р.3.26.

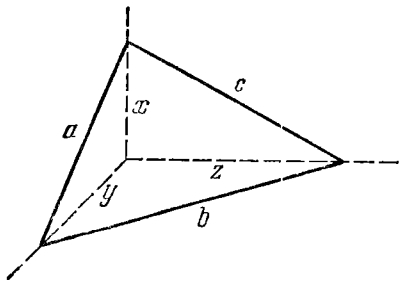


Рис. Р.3.27.

равно h, а расстояние второго равно $h-a$, то отношение площадей равно $h^2/(h-a)^2$. Поэтому площадь треугольника ABC равна $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+2)^2h^2}{4\sqrt{3}(h-a)^2}$.

Ответ. $\dfrac{a^2h^3(7+4\sqrt{3})}{12\sqrt{3}(h-a)^2}$.

3.27. Пусть трехгранный угол пересечен некоторой плоскостью и в сечении образовался треугольник со сторонами a, b и c (рис. Р.3.27). Обозначим через x, y и z боковые ребра образовавшейся пирамиды, если ее вершиной считать вершину данного трехгранного угла. Тогда объем этой пирамиды равен $xyz/6$. Поскольку все плоские углы, образующие трехгранный угол, прямые, имеем

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = b^2, \quad z^2 + x^2 = c^2.$$

Сложив эти уравнения, найдем $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. Теперь легко определить x, y и z. Таким образом,

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{8}}.$$

Если треугольник в сечении тупоугольный и $a \leqslant b < c$, то $a^2+b^2 < c^2$, т. е. первая скобка под корнем отрицательна, в то время как остальные положительны. Если же треугольник в сечении прямоугольный, то одна из скобок обращается в нуль. Таким образом, нет сечения трехгранного угла, которое не было бы остроугольным треугольником.

3.28. Осуществив построения, изображенные на рис. Р.3.28, постараемся вычислить объем данной пирамиды как удвоенный объем пирамиды $AODC$ с вершиной в точке A (равенство объемов $AODC$ и $BODC$ станет очевидным из дальнейшего). Докажем вначале, что $AFBE$ прямоугольник. Из равенства треугольников CFB и DEA следует, что $EA=BF$. Аналогично $BE=FA$. Следовательно, $AFBE$ — параллелограмм. Но $EF=AB$, а потому эта фигура — прямоугольник. Чтобы найти площадь треугольника DOC, нужно вычислить его высоту CF, для чего достаточно знать стороны прямоугольника $AFBE$.

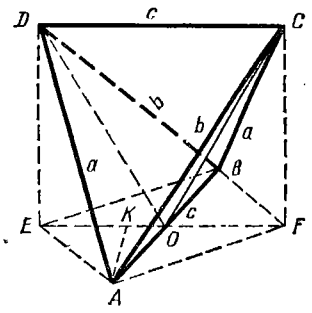


Рис. Р.3.28.

Отрезок CF может быть найден из двух прилегающих к нему прямоугольных треугольников. С одной стороны, $CF^2=BC^2-BF^2$, с другой стороны, $CF^2=AC^2-AF^2$, т. е. $BF^2-AF^2=a^2-b^2$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} BF^2+AF^2=c^2, \\ BF^2-AF^2=a^2-b^2 \end{cases}$$

из которой найдем $BF^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2)$, $AF^2=\frac{1}{2}(c^2-a^2+b^2)$. Теперь можно вычислить CF и AK:

$$CF^2=a^2-\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2),$$

$$AK=\frac{AE\cdot AF}{EF}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(c^2-a^2+b^2)}}{2c}.$$

Объем пирамиды $ABCD$ равен $2\cdot\frac{1}{3}AK\cdot\left(\frac{1}{2}DC\cdot CF\right)$.

Ответ. $\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)(c^2-a^2+b^2)}$.

3.29. Расположим пирамиду $ABCD$ так, как показано на рис. Р.3.29, *а*. Воспользуемся методом сравнения объемов по отношению к телу $ANBMCD$.

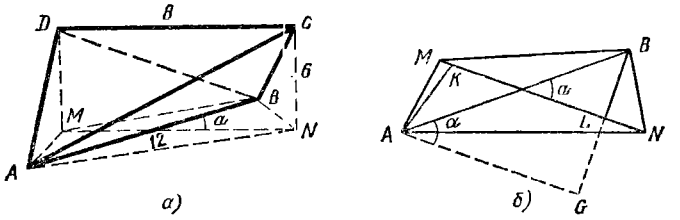


Рис. Р.3.29.

С одной стороны, его можно рассматривать как составленное из двух пирамид с общим основанием $MNCD$ и с вершинами в точках A и B. Основание $MNCD$ — прямоугольник с известными сторонами. Высотами будут перпендикуляры AK и

BL, опущенные на MN (рис. Р.3.29, *б*). Так как нам нужна сумма объемов двух пирамид с общим основанием, то выразим $AK+BL$ через AB и $\sin\alpha$. Тогда объем нашего тела будет выражен через α.

С другой стороны, $V_{ANBMCD}=V_{ABCD}+V_{ABMD}+V_{ABNC}$.

Проведем $AG\|KL$ (рис. Р.3.29, *б*). Тогда

$$AK+BL=GB=12\sin\alpha,\quad S_{MNCD}=6\cdot 8=48,$$

$$V_{ANBMCD}=\frac{1}{3}S_{MNCD}(AK+BL)=4\cdot 48\sin\alpha,$$

$$S_{MANB}=\frac{1}{2}AB\cdot NM\sin\alpha=48\sin\alpha,$$

$$V_{ABCD}+V_{ABMD}+V_{ABNC}=48+\frac{6}{3}(S_{ABM}+S_{ABN})=48+2S_{MANB}=$$
$$=48+2\cdot 48\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$48+2\cdot 48\sin\alpha=4\cdot 48\sin\alpha.$$

Отсюда

$$\sin\alpha=1/2.$$

Ответ. $\alpha=\pi/6$.

3.30. Поставим четырехугольную пирамиду $A_1BB_1C_1C$, в которую вписан шар, на основание BB_1C_1C (рис. Р.3.30). Пусть H — высота призмы, a — сторона

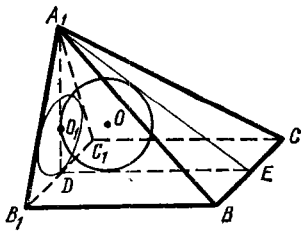


Рис. Р.3.30.

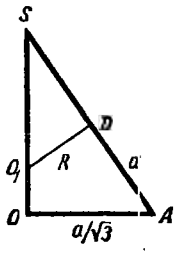


Рис. Р.3.31.

ее основания. Радиусы окружностей с центрами O и O_1 равны R. Так как треугольник $B_1A_1C_1$ правильный, то $a=2\sqrt{3}R$.

Рассмотрим треугольник DA_1E. Он прямоугольный и его площадь, с одной стороны, равна $\frac{1}{2}A_1D\cdot DE$, а с другой стороны, $\frac{R}{2}(A_1D+DE+A_1E)$. Поскольку

$$DE=H,\quad A_1D=a\sqrt{3}/2,\quad A_1E=\sqrt{3a^2/4+H^2},$$

получаем уравнение относительно H, которое после подстановки $a=2\sqrt{3}R$ и возведения в квадрат принимает вид $H^2=4HR$, откуда $H=4R$.

Ответ. $12\sqrt{3}R^3$.

3.31. Центр шара, касающегося трех ребер правильного тетраэдра, исходящих из общей вершины, должен лежать на биссектрисе соответствующего трехгранного угла, которая совпадает с высотой тетраэдра, опущенной из этой же вершины. Поскольку все четыре биссектрисы пересекаются в одной точке — центре вписанного в тетраэдр шара, достаточно рассмотреть треугольник SOA (рис. Р.3.31),

где SO — высота тетраэдра, SA — его ребро, а O_1 — центр искомого шара и шара, вписанного в тетраэдр.

Треугольники SAO и SO_1D подобны. В первом известны все стороны, во втором $SO_1 = a\sqrt{6}/4$. Это позволяет вычислить R.

Ответ. $a\sqrt{2}/4$.

3.32. Если один куб расположен внутри другого, а вершина O у них общая, то диагонали этих кубов, проходящие через O, лежат на одной прямой. Поэтому из всех подобных кубов, которые можно поместить в параллелепипед, мы выберем максимальный.

Пусть $c<a$ и $c<b$. Тогда в параллелепипед можно поместить куб с ребром c (рис. Р.3.32). Вычислим все стороны треугольника ABO и воспользуемся теоремой косинусов:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos x,$$
$$AO^2 = a^2 + b^2 + c^2,\ BO^2 = 3c^2,$$
$$AB^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2.$$

Для определения $\cos x$ получим уравнение

$$\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos x = c + b + a,$$

которое симметрично относительно c, b и c, а потому не зависит от соотношения

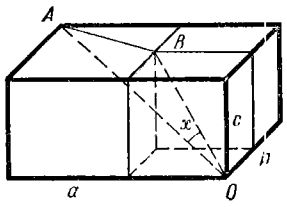


Рис. Р.3.32.

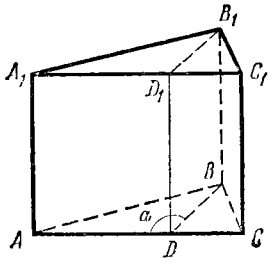


Рис. Р.3.33.

между этими величинами. Убедитесь сами в том, что $\cos x$ не будет больше единицы при любых a, b и c.

Ответ. $\arccos \dfrac{a+b+c}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

3.33. Разность углов A и C равна φ, BD — биссектриса угла B в треугольнике ABC (рис. Р.3.33). Вычислим угол α:

$$\alpha = \frac{B}{2} + C = \frac{\pi - A - C}{2} + C = \frac{\pi}{2} + \frac{C-A}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}.$$

Объем призмы равен произведению AA_1 на площадь основания ABC, т. е.

$$AA_1\left(\frac{1}{2}AD \cdot DB \sin\alpha + \frac{1}{2}DC \cdot DB \sin\alpha\right) = \frac{1}{2}AA_1 \cdot DB \cdot AC \sin\alpha = \frac{1}{2}aS\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}aS\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

3.34. Пусть выбраны диагонали C_1D и B_1C (рис. Р.3.34). Так как $B_1C \parallel A_1D$ и $C_1D \parallel B_1A$, то плоскости A_1C_1D и AB_1C параллельны. Расстояние между B_1C и C_1D равно расстоянию между этими плоскостями.

Обе плоскости A_1C_1D и AB_1C перпендикулярны к диагонали BD_1. Поэтому искомое расстояние равно разности между отрезком BD_1 и удвоенной высотой пирамиды $D_1A_1C_1D$. Объем этой пирамиды равен $a^3/6$, а площадь основания A_1C_1D равна $a^2\sqrt{3}/2$, следовательно, высота $h = a/\sqrt{3}$. Так как $BD_1 = a\sqrt{3}$, то искомое расстояние равно $a\sqrt{3} - 2a/\sqrt{3} = a/\sqrt{3}$.

Ответ. $a/\sqrt{3}$.

3.35. Из соображений симметрии ясно, что точка O лежит на диагонали AC_1 куба. Для доказательства достаточно установить, что плоскость KMN

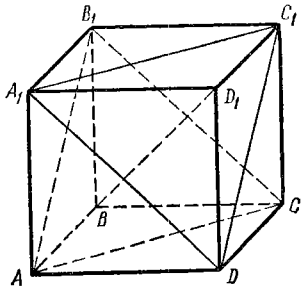


Рис. Р.3.34.

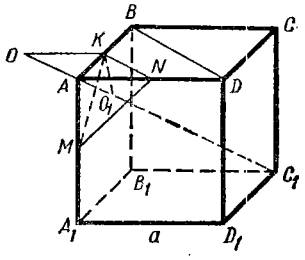


Рис. Р.3.35.

(рис. Р.3.35) перпендикулярна к AC_1 и что AC_1 проходит через точку O_1, являющуюся центром треугольника KMN.

По теореме о трех перпендикулярах $AC_1 \perp BD$. Следовательно, $AC_1 \perp KN$. Аналогично прямая AC_1 перпендикулярна к KM или MN, т. е. AC_1 — перпендикуляр к плоскости KMN.

Треугольник KMN равносторонний. Так как $AK = AN = AM$, то из равенства соответствующих треугольников, имеющих общие вершины в точках A и O_1, получаем $KO_1 = NO_1 = MO_1$.

Мы доказали, что центр O сферы лежит на продолжении отрезка AC_1.

Так как AK — биссектриса в треугольнике OKO_1, то $\dfrac{OK}{KO_1} = \dfrac{OA}{AO_1}$. Отсюда найдем $OK = R$, выразив остальные отрезки через ребро куба:

$$KO_1 = \frac{KN}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}, \quad AO_1 = \sqrt{AK^2 - KO_1^2} = \frac{a}{\sqrt{12}},$$

$$OA = OO_1 - AO_1 = \sqrt{OK^2 - KO_1^2} = AO_1 = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{6}} - \frac{a}{\sqrt{12}}.$$

Подставив все эти выражения в пропорцию $\dfrac{OK}{KO_1} = \dfrac{OA}{AO_1}$, получим уравнение относительно R. После простых преобразований это уравнение запишется в виде

$$6R^2 - 2\sqrt{6}aR - 3a^2 = 0.$$

Геометрический смысл имеет только положительный корень.

Ответ. $R = \sqrt{3/2}\,a$.

3.36. Докажем вначале, что каждая сторона четырехугольника параллельна биссектральной плоскости двугранного угла, образованного данными взаимно перпендикулярными плоскостями. Перенесем сторону четырехугольника параллельно себе так, чтобы одна из ее вершин лежала на ребре этого двугранного угла (рис. Р.3.36,*а*). Полученный отрезок RS спроектируем на плоскости P и Q. Так как проекции при параллельном переносе не изменяются, то $RS_1 = RS_2 = 1$. Построим линейный угол S_2TS_1, измеряющий двугранный угол между плоскостями P и Q, и соединим точки S и T. Треугольники RS_1T и RS_2T и треугольники

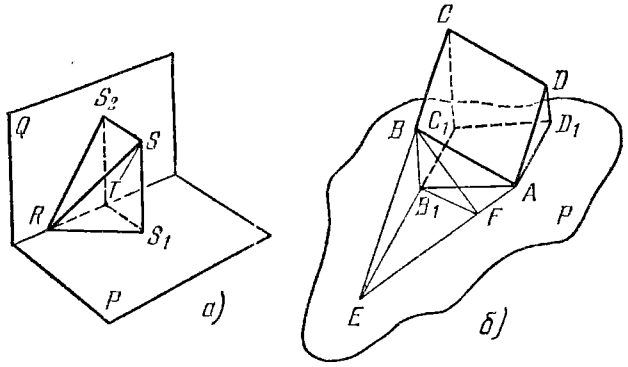


Рис. Р.3.36.

RS_1S и RS_2S попарно равны, т. е. прямоугольные треугольники S_1ST и S_2ST — равные и равнобедренные. Следовательно, углы STS_1 и STS_2 равны 45°, а это означает, что сторона данного четырехугольника параллельна биссектральной плоскости. Проведя аналогичные рассуждения для каждой стороны, придем к выводу, что плоскость четырехугольника параллельна биссектральной плоскости.

Перенесем теперь плоскость P параллельно так, чтобы четырехугольник уперся в нее одной из своих вершин, которую обозначим буквой A (рис. Р.3.36,*б*).

Спроектируем четырехугольник $ABCD$ на плоскость P. Поскольку его проекция $AB_1C_1D_1$ — квадрат, то $ABCD$ — параллелограмм. Поэтому один из отрезков AB или AD равен $\sqrt{5}/2$. Предположим, что это AB.

Построим теперь след, оставленный плоскостью четырехугольника $ABCD$ на плоскости P. Для этого построим сначала точку E, в которой пересекаются прямые BC и B_1C_1, а затем соединим E и A. Угол между плоскостями $ABCD$ и P измерим линейным углом BFB_1, равным 45°. Остается провести вычисления: $BB_1 = \sqrt{5/4 - 1} = 1/2$, $B_1F = BB_1 = 1/2$, следовательно, угол B_1AF равен 30° и поэтому $B_1E = 1/\sqrt{3}$; находим $BE = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{12}}$, и так как $\frac{BC}{BE} = \frac{B_1C_1}{B_1E}$, то $BC = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Ответ. $\sqrt{5} + \sqrt{7}$.

3.37. Опишем около данной пирамиды конус с образующей l, высотой H и радиусом нижнего основания R. Объем конуса больше объема пирамиды. Если мы докажем, что объем конуса меньше куба образующей, то задача тем самым будет решена.

Рассмотрим угол α между H и l. Тогда

$$H = l\cos\alpha, \quad R = l\sin\alpha,$$

а объем конуса равен

$$V=\frac{\pi}{3}R^2H=\frac{\pi}{3}l^3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Составим отношение:

$$\frac{V}{l^3}=\frac{1}{3}\pi\sin^2\alpha\cos\alpha=\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha\sin\alpha\leqslant\frac{\pi}{6}<1,$$

что и доказывает сформулированное в условии утверждение.

3.38. В осевом сечении конуса получим картину, изображенную на рис. Р. 3.38. По условию $r=pR$. Из подобия треугольников EOB и FO_1B получим

$$\frac{r}{R}=\frac{H-2R-r}{H-R},\ \text{т. е. } H=\frac{2R^2}{R-r},$$

а из подобия треугольников ADB и OEB $(AB=l)$ найдем

$$\frac{l}{\rho}=\frac{H-R}{R},\qquad (*)$$

т. е.

$$l=\rho\frac{H-R}{R}=\rho\frac{1+p}{1-p}.$$

Так как $l^2-\rho^2=H^2$, получаем уравнение относительно ρ, решая которое находим

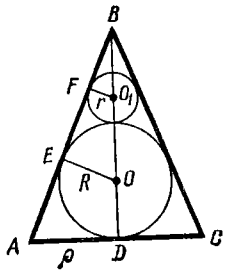


Рис. Р.3.38.

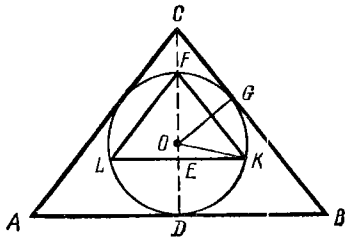


Рис. Р.3.39.

$\rho^2=R^2/p$. Полная поверхность конуса равна $\pi p(\rho+l)$. С помощью производной пропорции из соотношения (*) получим

$$\frac{l+\rho}{\rho}=\frac{H}{\rho},\ \text{т. е. } (l+\rho)\rho=\rho^2\frac{H}{R}=\frac{2R^2}{p(1-p)}.$$

Сумма поверхностей шаров равна $4\pi(R^2+r^2)$. Составим искомое отношение:

$$\frac{2(R^2+r^2)p(p-1)}{R^2}=2(1+p^2)p(1-p).$$

Ответ. $2p(1-p)(1+p^2)$.

3.39. Обозначим радиус сферы через R и рассмотрим осевое сечение каждого из конусов. Второй конус можно расположить внутри сферы произвольным образом. Мы расположим его так, чтобы образующие обоих конусов были параллельны (рис. Р.3.39). Выразим радиусы оснований конусов через R.

В треугольнике FOK углы OFK и OKF равны $\alpha/2$. Следовательно, угол EOK равен их сумме, т. е. α. Из треугольника EOK находим $EK = R\sin\alpha$. Далее,

$$EF = EO + OF = R(1+\cos\alpha) \qquad CD = CO + OD = R\left[1 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)}\right],$$

$$DB = DC\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = R\left[1 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)}\right]\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = R\frac{1+\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

Составим теперь отношение объемов и приравняем его к a. После простых преобразований придем к уравнению относительно α:

$$1+\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt[3]{a}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad \text{или} \quad 1+\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt[3]{a}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Так как $1+\sin(\alpha/2) \neq 0$ (иначе не существует конус), то

$$2\sqrt[3]{a}\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sqrt[3]{a}\sin\frac{\alpha}{2} + 1 = 0,$$

откуда

$$\alpha = 2\arcsin\left[\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt[3]{a}}}\right)\right].$$

Чтобы можно было осуществить извлечение корня, необходимо взять $a \geqslant 8$.

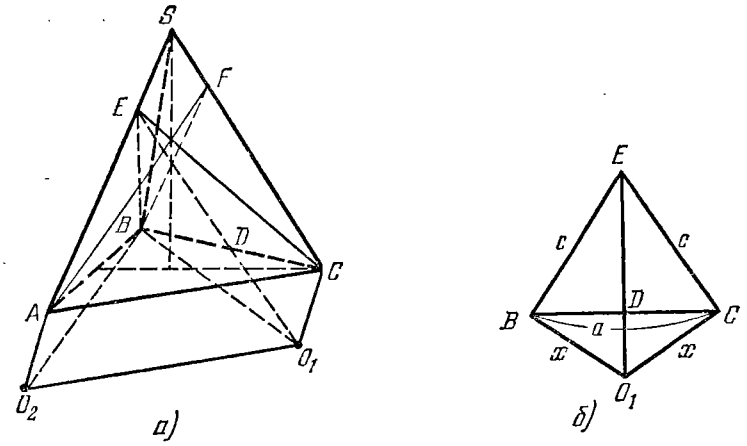


Рис. Р.3.40.

Так как $a > 0$, то выражение, стоящее под знаком арксинуса, как легко проверить, всегда расположено между 0 и 1.

Ответ. $\alpha = 2\arcsin\left[\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt[3]{a}}}\right)\right]$ при $a \geqslant 8$.

3.40. Так как O_1 — центр сферы, касающейся граней SAB и SAC в точках B и C (рис. Р.3.40, *а*), то O_1 лежит в плоскости, перпендикулярной к их общему ребру SA и проходящей через эти точки. При этом ED — биссектриса линейного угла BEC, измеряющего двугранный угол между рассматриваемыми плоскостями.

Если сделать такие же построения для второй сферы O_2, то получим четырехугольник $AFBO_2$, равный четырехугольнику $BECO_1$ (равенство очевидно из соображений симметрии, однако этот факт легко устанавливается и непосредственно). Следовательно, $CO_1 = AO_2 = BO_2 = BO_1$. Заметим, что $AO_2 \parallel CO_1$ как два перпендикуляра к плоскости ASC. Итак, $O_1O_2 = AC = a$.

Поскольку, $O_1B \perp ASB$, то $O_1B \perp SB$, аналогично $O_2B \perp SB$, откуда $SB \perp O_1BO_2$. Мы доказали, что SB — высота пирамиды SO_1BO_2.

Чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос, остается вычислить длину отрезка BO_1. Так как отрезок EC из треугольника ASC определяется легко:

$$EC^2 = \frac{a^2}{4b^2}(4b^2 - a^2),$$

то дальнейшие вычисления нельзя проводить, оставаясь в плоскости BEC (рис. Р.3.40, *б*). Обратим лишь внимание на тот факт, что треугольники BES и CES равны, т. е. $BE = CE$, откуда следует, что биссектриса ED является в треугольнике BEC и медианой. Фигура $BECO_1$ — ромбоид ($BC \perp EO_1$). Обозначим $EC = c$, $BO_1 = x$. Треугольники ECO_1 и ECD подобны. Поэтому $ED : c = \frac{a}{2} : x$, откуда $x = \frac{ac}{2ED}$, т. е. $x^2 = \frac{a^2c^2}{4c^2 - a^2}$.

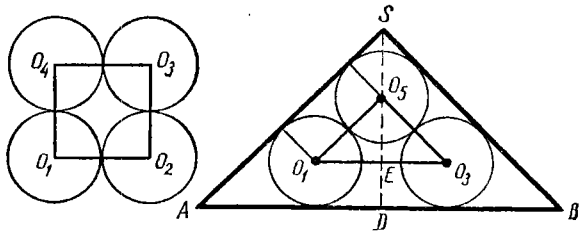
Подставляя вместо $c = EC$ его выражение через a и b, получим

$$OB^2 = \frac{a^2(4b^2 - a^2)}{4(3b^2 - a^2)}.$$

Теперь можно определить высоту треугольника O_1BO_2, опущенную на O_1O_2. Она равна $\frac{ab}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$. Все элементы, необходимые для вычисления объема, сосчитаны.

Ответ. $\frac{a^2b^3}{12\sqrt{3b^2 - a^2}}$.

3.41. Расстояние между центрами O_1 и O_3 двух не касающихся друг друга шаров равно $2r\sqrt{2}$ (рис. Р.3.41, *а*). На рис. Р.3.41, *б* изображено осевое сечение



а) *б)*

Рис. Р.3.41.

конуса, проходящее через O_1 и O_3. В этом же сечении будет лежать и O_5. В треугольнике O_5O_1E сторона $O_1O_5 = 2r$, а $O_1E = r\sqrt{2}$, следовательно, $\frac{O_1E}{O_1O_5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. угол O_5O_1E равен 45°. Треугольник ASD подобен треугольнику O_1O_5E. Поэтому $H = R$. Найдем H:

$$H = SO_5 + O_5E + ED = \sqrt{2}r + \frac{2r}{\sqrt{2}} + r = r(2\sqrt{2} + 1).$$

тельностью (a_n) (или, короче, последовательностью) называется функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Последовательность называется *бесконечной*, если функция задана на множестве всех натуральных чисел. Последовательность называется *конечной*, если функция задана на множестве первых n натуральных чисел.

Часто последовательность задается формулой ее n-го (или общего) члена:

$$a_n = f(n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

позволяющей по номеру члена последовательности вычислить этот член.

Например, если известно, что $a_n = n^2$ при любом n, то $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$ и т. д.

Формула n-го члена может быть и более сложной. Например, формула

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } n = 2k-1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

задает последовательность

$$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \ldots, \frac{1}{2k-1}, 2k, \frac{1}{2k+1}, \ldots$$

Иногда последовательность задается рекуррентной формулой, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим.

При рекуррентном способе задания последовательности обычно указывают:

1) первый член последовательности (или несколько первых членов);

2) формулу, которая позволяет определить любой член последовательности по известным предыдущим членам.

Например, рассмотрим последовательность (a_n), первый член которой равен 1, второй -2, а каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Тогда $a_3 = 1 + 2 = 3$, $a_4 = 2 + 3 = 5$, $a_5 = 3 + 5 = 8$ и т. д. Значит, последовательность (a_n) задана. Не всякую последовательность можно задать формулой n-го члена или рекуррентной формулой. Например, можно образовать последовательность приближенных значений (с недостатком) числа $\sqrt{2}$:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

или последовательность простых чисел (в порядке возрастания):

$$2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ \ldots,$$

хотя формулы n-го члена или рекуррентной формулы в обоих случаях мы не имеем. Для каждой последовательности должно быть задано правило, по которому можно получить любой ее член. В каком виде приведено это правило, не имеет значения.

Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если каждый последующий ее член больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$ для любого n.

Например, возрастающими являются последовательности:

1) 1; 4; 9; 16; ...; n^2; ...; $a_n = n^2$;

2) -2; 0; 2; 4; ...; $2n-4$; ...; $a_n = 2n-4$;

3) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; ...; $\frac{n}{n+1}$; ...; $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Последовательность (a_n) называется *убывающей*, если каждый последующий ее член меньше предыдущего, т. е. $a_{n+1} < a_n$ для любого n.

Например, убывающими являются последовательности:

1) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; ...; $\frac{1}{n}$; ...; $a_n = \frac{1}{n}$;

2) -1; -2; -3; -4; ...; $-n$; ...; $a_n = -n$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*. Не всякая последовательность является монотонной. Например, конечная последовательность

$$7;\ -5;\ -6;\ 0;\ 1,$$

бесконечная последовательность

$$1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \ldots;\ (-1)^{n-1};\ \ldots;\ a_n = (-1)^{n-1};$$

а также последовательность

$$5;\ 5;\ 5;\ \ldots;\ 5;\ \ldots;\ a_n = 5$$

не являются ни возрастающими, ни убывающими.

Заметим, что последовательность, все члены которой равны между собой, называют *постоянной* последовательностью.

§ 2. Арифметическая прогрессия

Определение. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется *арифметической прогрессией*.

Если последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, то по определению

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = \ldots,$$

т. е. разность между любым членом и предыдущим с ним равна одному и тому же числу. Оно называется *разностью* арифметической прогрессии и обозначается буквой d.

Таким образом, арифметическая прогрессия (a_n) определяется условиями:

1) $a_1 = a$, где a — некоторое число;
2) $a_{n+1} = a_n + d$ для любого $n \geqslant 1$.

Если, например, $a_1 = 1$ и $d = 1$, то мы имеем арифметическую прогрессию, членами которой являются последовательные натуральные числа:

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots$$

Арифметическая прогрессия (a_n) обладает следующим характеристическим свойством: *любой член ее, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов.*

Доказательство. По определению арифметической прогрессии

$$a_{n+1} = a_n + d,$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + d,$$

или $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, откуда

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Справедливо и обратное: *если некоторая последовательность такова, что любой ее член, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия.*

В самом деле, пусть для любых трех соседних членов некоторой последовательности (a_n) выполняется соотношение

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}. \qquad (1)$$

Тогда $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, или $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, т. е. разность между любым членом последовательности (a_n) и предыдущим с ним равна одному и тому же числу. Значит (a_n) — арифметическая прогрессия.

Таким образом, установленное свойство присуще арифметической прогрессии, и только ей.

Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия; a_1 — ее первый член, а d — разность прогрессии.

Выведем формулу для n-го члена арифметической прогрессии.

По определению арифметической прогрессии

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d, \\ a_4 &= a_3 + d, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d, \\ a_n &= a_{n-1} + d. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти $n - 1$ равенств, получим

$$(a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = \\ = a_1 + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1}) + (n-1)\,d,$$

откуда

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \qquad (2)$$

Формула (2) позволяет найти любой член арифметической прогрессии, если известны ее первый член и разность. Поэтому она называется *формулой общего члена* арифметической прогрессии. Выведем теперь формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Обозначим сумму n первых членов арифметической прогрессии (a_n) через S_n и запишем эту сумму дважды, изменив во втором случае порядок слагаемых на обратный:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Сложим почленно эти равенства и получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + 1).$$

В правой части равенства сумма двух чисел в каждой скобке равна $a_1 + a_n$. В самом деле:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$;

$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ и т. д.

Число слагаемых, заключенных в скобки, равно n. Поэтому

$$2S_n = (a_1 + a_n)n,$$

откуда

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \qquad (3)$$

— *формула суммы n первых членов* арифметической прогрессии.

Заменим в этой формуле член a_n его выражением $a_1 + d(n-1)$. Тогда

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \qquad (4)$$

По этой формуле сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n) выражается через первый член, разность и число членов.

§ 3. Геометрическая прогрессия

Определение. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется *геометрической прогрессией*.

Если последовательность (a_n) — геометрическая прогрессия, то по определению

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots,$$

т. е. отношение любого члена к предыдущему равно одному и тому же числу. Это число называется *знаменателем* геометрической прогрессии и обозначается буквой q.

Таким образом, геометрическая прогрессия (a_n) определяется условиями:

1) $a_1 = a \quad (a \neq 0)$;

2) $a_{n+1} = a_n q \quad (q \neq 0)$ для любого $n \geqslant 1$.

Если, например, $a_1 = 1$ и $q = 2$, то мы имеем геометрическую прогрессию

$$1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots$$

Условиями $a_1 = 4$, $q = -\frac{1}{2}$ задается геометрическая прогрессия

$$4;\ -2;\ 1;\ -\frac{1}{2};\ \ldots$$

Геометрическая прогрессия (a_n) обладает следующим характеристическим свойством: *квадрат любого ее члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов:*

$$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} \quad (n \geqslant 1). \tag{5}$$

Доказательство. По определению геометрической прогрессии

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q,$$

откуда

$$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}.$$

Справедливо и обратное: *если некоторая последовательность (a_n) такова, что $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ и $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, то эта последовательность (a_n) — геометрическая прогрессия.*

В самом деле, пусть для любых трех соседних членов некоторой последовательности (a_n) выполняется соотношение (5). Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}},$$

т. е. отношение любого члена последовательности (a_n) к предыдущему равно одному и тому же числу. Значит, (a_n) — геометрическая прогрессия.

Таким образом, установленное свойство присуще геометрической прогрессии, и только ей.

В случае геометрической прогрессии с положительными членами соотношение (5) можно записать в виде

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}. \tag{6}$$

Геометрическая прогресия с положительными членами обладает следующим характеристическим свойством: *любой ее член, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов.*

Пусть (a_n) — геометрическая прогрессия, a_1 — ее первый член, q — знаменатель прогрессии. Выведем формулу для n-го члена геометрической прогрессии.

По определению геометрической прогрессии

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q, \\ a_3 &= a_2 q, \\ a_4 &= a_3 q, \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} q, \\ a_n &= a_{n-1} q. \end{aligned}$$

Умножая почленно эти $n-1$ равенств, получим

$$(a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-1})\, a_n = (a_2 a_3 \ldots a_{n-2} a_{n-1})\, a_1 q^{n-1}.$$

Так как $a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-1} \neq 0$, то после сокращения имеем

$$a_n = a_1 q. \tag{7}$$

Формула (7) позволяет найти любой член геометрической прогрессии, если известны ее первый член и знаменатель. Поэтому она называется *формулой общего члена* геометрической прогрессии.

Выведем теперь формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Обозначим сумму n первых членов геометрической прогрессии через S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \tag{*}$$

Если знаменатель прогрессии q равен 1, то $S_n = n a_1$.

Если же $q \neq 1$, то поступим следующим образом. Умножим равенство (*) почленно на q:

$$qS_n = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n q.$$

Так как $a_1 q = a_2$, $a_2 q = a_3$, $a_3 q = a_4$, $\ldots$, $a_{n-1} q = a_n$, то

$$qS_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n q.$$

Вычтем почленно из этого равенства равенство (*). Получим

$$qS_n - S_n = a_n q - a_1, \quad (q-1)\, S_n = a_n q - a_1,$$

откуда

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} \quad (q \neq 1) \tag{8}$$

— *формула суммы n первых членов* геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$.

Заменим в этой формуле член a_n его выражением $a_1 q^{n-1}$. Тогда

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1} \quad (q \neq 1). \tag{9}$$

§ 4. Задачи на прогрессии

Пример 1. Найти все последовательности, которые являются одновременно и арифметическими и геометрическими прогрессиями.

Решение. Пусть числа a_1, a_2, ..., a_n, ... образуют арифметическую прогрессию. Тогда

$$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2} \qquad (n\geqslant 1).$$

Так как (a_n) — геометрическая прогрессия, то, применяя формулу общего вида $a_n=a_1q^{n-1}$, где $a_1\neq 0$, $q\neq 0$, получаем

$$a_1q^n=\frac{a_1q^{n-1}+a_1q^{n+1}}{2}$$

или после сокращения на $a_1q^{n-1}\neq 0$

$$q=\frac{1+q^2}{2},$$

т. е. $(q-1)^2=0$. Отсюда $q=1$ и данная последовательность есть последовательность равных чисел a_1, a_1, ..., a_1, ...

Пример 2. Между числами 3 и 19 вставить три средних арифметических.

Решение. Нужно найти такие три числа a_2, a_3, a_4, чтобы последовательность 3, a_2, a_3, a_4, 19 была арифметической прогрессией. Пусть разность этой прогрессии равна d. По формуле общего члена арифметической прогрессии $19=3+4d$; откуда $d=4$. Получена прогрессия 3; 7; 11; 15; 19. Искомые числа 7; 11; 15.

Пример 3. Найти сумму всех двузначных натуральных чисел.

Решение. Имеем $a_1=10$, $a_n=99$, $d=1$. Тогда $a_n=a_1+(n-1)d$, т. е. $99=10+n-1$ или $n=90$. Поэтому

$$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{10+99}{2}\cdot 90=4905.$$

Пример 4. Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

Решение. По условию $b^2-a^2=c^2-b^2$. Рассмотрим

$$\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{b-a}{(a+c)(b+c)}=\frac{b^2-a^2}{(a+c)(b+c)(a+b)},$$

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}=\frac{c-b}{(a+b)(a+c)}=\frac{c^2-b^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}$, и, значит, числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию.

Пример 5. Между числами 1 и 256 вставить три средних геометрических.

Решение. Нужно найти такие три числа a_2, a_3, a_4, чтобы последовательность 1, a_2, a_3, a_4, 256 была геометрической прогрессией. Пусть знаменатель этой прогрессии равен q. По формуле общего члена геометрической прогрессии $256 = 1 \cdot q^4$ или $4^4 = q^4$, откуда $q = 4$. Получена прогрессия 1; 4; 16; 64; 256. Искомые числа 4, 16, 64.

Пример 6. В геометрической прогрессии сумма первых четырех членов равна 15, а сумма членов от второго до пятого включительно равна 30. Найти прогрессию.

Решение. По условию $S_4 = 15$, $S_5 - a_1 = 30$, т. е.

$$\begin{cases} \frac{a_1(q^4-1)}{q-1} = 15, \\ \frac{a_1(q^5-1)}{q-1} - a_1 = 30, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{a_1(q^4-1)}{q-1} = 15, \\ \frac{a_1 q(q^4-1)}{q-1} = 30. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $q = 2$, $a_1 = 1$; следовательно, найдена прогрессия 1; 2; 4; 8; 16.

Пример 7. Три положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 8, то прогрессия станет арифметической. Но если после этого увеличить третье число на 64, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение. Обозначая числа a, aq, aq^2, имеем

$$\begin{cases} aq + 8 = \frac{a + aq^2}{2}, \\ (aq+8)^2 = a(aq^2 + 64). \end{cases}$$

Упрощая второе уравнение, получаем

$$aq + 4 - 4a = 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} a(1 + q^2 - 2q) = 16, \\ a(4 - q) = 4; \end{cases}$$

откуда $q^2 + 2q - 15 = 0$. Получаем $q = 3$ (отрицательное значение отбрасываем). Тогда $a = 4$. Искомые числа 4, 12, 36.

§ 5. Логарифмирование и потенцирование

Напомним, что из определения логарифма (§ 4 гл. VII) вытекает *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b. \tag{10}$$

Используем это тождество для доказательства свойств логарифмов.

1. *Логарифм произведения двух любых положительных чисел равен сумме логарифмов множителей:*

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \tag{11}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Доказательство. Подставляя в тождество (10) вместо b числа x_1 и x_2, получаем

$$x_1 = a^{\log_a x_1}, \quad x_2 = a^{\log_a x_2}.$$

Умножая эти равенства, имеем

$$x_1 x_2 = a^{\log_a x_1} a^{\log_a x_2}$$

или по свойству степени

$$x_1 x_2 = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}.$$

С другой стороны, используя основное логарифмическое тождество,

$$x_1 x_2 = a^{\log_a (x_1 x_2)}.$$

Поэтому

$$a^{\log_a (x_1 x_2)} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}.$$

Так как $a > 0$ и $a \neq 1$, то

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Равенство (11) доказано.

Отметим, что установленное свойство справедливо для любого числа положительных множителей.

Например, для трех множителей $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$:

$$\log_a (x_1 x_2 x_3) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3.$$

2. *Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:*

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \tag{12}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Доказательство. Согласно основному логарифмическому тождеству

$$x_1 = a^{\log_a x_1}, \quad x_2 = a^{\log_a x_2}.$$

Отсюда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{\log_a x_1}}{a^{\log_a x_2}},$$

или по свойству степени $\frac{x_1}{x_2} = a^{\log_a x_1 - \log_a x_2}$.

С другой стороны,

$$\frac{x_1}{x_2} = a^{\log_a \frac{x_1}{x_2}}.$$

Поэтому

$$a^{\log_a \frac{x_1}{x_2}} = a^{\log_a x_1 - \log_a x_2}.$$

Так как $a > 0$ и $a \neq 1$, то

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Равенство (12) доказано.

3. *Логарифм степени равен произведению показателя степени и логарифма ее основания*:

$$\log_a x^k = k \log_a x, \tag{13}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, k — *любое действительное число.*

Доказательство. Согласно основному логарифмическому тождеству

$$x = a^{\log_a x}.$$

Отсюда

$$x^k = (a^{\log_a x})^k,$$

или по свойству степени

$$x^k = a^{k \log_a x}.$$

С другой стороны,

$$x^k = a^{\log_a (x^k)}.$$

Поэтому

$$a^{\log_a (x^k)} = a^{k \log_a x},$$

откуда

$$\log_a x^k = k \log_a x.$$

Равенство (13) доказано.

Каждому положительному числу при заданном основании отвечает определенное значение логарифма. Нахождение логарифмов заданных чисел или выражений называется *логарифмированием.*

Логарифмируя некоторое алгебраическое выражение и применяя свойства логарифмов, мы сводим действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня к более простым действиям сложения и вычитания логарифмов и их умножения и деления на число.

Действие, обратное логарифмированию, называется *потенцированием.* Оно состоит в отыскании числа по известному значению его логарифма с заданным основанием.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти логарифм выражения $x = \dfrac{17^2 \cdot \sqrt[3]{120}}{\sqrt{31 \cdot 43}}$.

Решение. Запишем сначала данное выражение в следующем виде:

$$x=\frac{17^2\cdot 120^{\frac{1}{3}}}{31^{\frac{1}{2}}\cdot 43^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда по свойству логарифма частного

$$\log_a x=\log_a\left(17^2\cdot 120^{\frac{1}{3}}\right)-\log_a\left(31^{\frac{1}{2}}\cdot 43^{\frac{1}{2}}\right).$$

По свойству логарифма произведения имеем

$$\log_a x=\log_a 17^2+\log_a 120^{\frac{1}{3}}-\log_a 31^{\frac{1}{2}}-\log_a 43^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя свойство логарифма степени, получим

$$\log_a x=2\log_a 17+\frac{1}{3}\log_a 120-\frac{1}{2}\log_a 31-\frac{1}{2}\log_a 43.$$

Пример 2. Прологарифмировать по основанию 10 выражение $500a^3b^5$, где $a>0$, $b>0$.

Решение.

$$\lg(500a^3b^5)=\lg 500+\lg a^3+\lg b^5=\lg 100+\lg 5+3\lg a+5\lg b,$$

или

$$\lg(500a^3b^5)=2+\lg 5+3\lg a+5\lg b,$$

так как $\lg 100=2$.

Пример 3. Найти x:

а) $x=10\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$; б) $x=49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$.

Решение. а) $\frac{1}{2}\lg 9=\lg 9^{\frac{1}{2}}=\lg 3$; $\lg 3-\lg 2=\lg\frac{3}{2}$;

$$100^{\lg\frac{3}{2}}=\left(10^{\lg\frac{3}{2}}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Мы использовали логарифмическое тождество

$$10^{\lg x}=x\quad(x>0).$$

Следовательно, $x=10\cdot\frac{9}{4}=\frac{45}{2}$.

б) $1-\log_7 2=\log_7 7-\log_7 2=\log_7\frac{7}{2}$;

$$49^{\log_7\frac{7}{2}}=\left(7^{\log_7\frac{7}{2}}\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4};$$

$$5^{-\log_5 4}=(5^{\log_5 4})^{-1}=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, $x=\frac{49}{4}+\frac{1}{4}=\frac{25}{2}$.

Пример 4. Упростить: а) $\lg a^2$, б) $\lg(a^4b^3c^2)$, если $a>0$, $b>0$, $c<0$.

Решение. а) Так как $a^2>0$ для любого $a\neq 0$, то $\lg a^2$ имеет смысл. Свойство логарифма степени было установлено при условии, что основание положительно. Чтобы его применить, используем равенство $a^2=|a|^2$, причем $|a|>0$ при $a\neq 0$. Поэтому $\lg a^2=\lg|a|^2=2\lg|a|$, где $a\neq 0$.

б) Так как $a^4>0$, $b^3>0$, $c^2>0$ для любых $a\neq 0$, $c\neq 0$ и $b>0$, то $a^4b^3c^2>0$ и $\lg(a^4b^3c^2)$ имеет смысл. Тогда

$$\lg(a^4b^3c^2)=\lg(|a|^4\cdot b^3\cdot|c|^2)=$$
$$=4\lg|a|+3\lg b+2\lg|c|=4\lg a+3\lg b+2\lg(-c),$$

так как при $a>0$ и $c<0$ имеем $|a|=a$, $|c|=-c$.

Пример 5. Упростить выражение $\log_4\frac{x^2}{4}-2\log_4 4x^4$ и вычислить его значение при $x=-2$.

Решение. Поступаем так же, как при решении примера 4:

$$\log_4\frac{|x^2|}{4}-2\log_4 4|x|^4=$$
$$=2\log_4|x|-\log_4 4-2\log_4 4-8\log_4|x|=-6\log_4|x|-3.$$

При $x=-2$ имеем $\log_4|x|=\log_4 2=\frac{1}{2}$.

Поэтому исходное выражение равно -6 при $x=-2$.

Пример 6. Найти x, если $\log_a x=3\log_a y-\frac{1}{2}\log_a z$, где $a>0$, $a\neq 1$, $y>0$, $z>0$.

Решение. Применяя свойства логарифмов, получаем

$$\log_a x=\log_a y^3-\log_a z^{\frac{1}{2}}=\log_a\frac{y^3}{z^{\frac{1}{2}}}=\log_a\frac{y^3}{\sqrt{z}}.$$

Из равенства логарифмов чисел с одинаковым основанием следует и равенство самих чисел, т. е. $x=\frac{y^3}{\sqrt{z}}$.

Пример 7. Найти x, если $\lg x=2\lg 3+\frac{1}{3}\lg 5-\lg 7$.

Решение. Потенцируя, получаем

$$\lg x=\lg 3^2+\lg 5^{\frac{1}{3}}-\lg 7=\lg\frac{3^2\cdot 5^{\frac{1}{3}}}{7};$$

откуда $x=\frac{9}{7}\sqrt[3]{5}$.

§ 6. Десятичные логарифмы. Характеристика и мантисса

Логарифмы чисел по основанию 10 называются *десятичными*. Десятичным логарифмам присущи все те свойства, которыми обладают логарифмы при основании, большем 1. График функции $y=\lg x$ был изображен на рис. 52. Кроме того, десятичные логарифмы обладают важным специфическим свойством.

Прежде чем рассмотреть это свойство, введем следующее определение.

Целая часть десятичного логарифма числа $x>0$ называется *характеристикой*, а дробная — *мантиссой* этого логарифма.

Следовательно, $\lg x=[\lg x]+\{\lg x\}$, где $[\lg x]$ — характеристика $\lg x$, а $\{\lg x\}$ — его мантисса.

Мы знаем, что любое положительное число x можно записать в стандартном виде:

$$x=a\cdot 10^n,$$

где $1\leqslant a<10$, n — целое число. Число n называется *порядком* числа x.

Справедливо следующее свойство десятичных логарифмов чисел: *характеристика десятичного логарифма числа* $x=a\cdot 10^n$ *равна порядку этого числа, а мантисса равна* $\lg a$.

Доказательство. Если $x=a\cdot 10^n$, где $1\leqslant a<10$ и n — целое число, то $\lg x=\lg a+\lg 10^n=n+\lg a$.

Так как $1\leqslant a<10$, то $0\leqslant\lg a<1$. Следовательно, $\lg x=[\lg x]+\{\lg x\}$, причем $[\lg x]=n$, $\{\lg x\}=\lg a$.

Следствие. *Десятичные логарифмы чисел, отличающихся друг от друга только порядком, имеют одну и ту же мантиссу.*

В самом деле, мантиссы десятичных логарифмов чисел $a\cdot 10^k$ и $a\cdot 10^n$, где $1\leqslant a<10$, а k и n — целые числа, будут одинаковыми и равными $\lg a$.

Это следствие можно сформулировать иначе: *мантисса логарифма числа не зависит от положения запятой в числе.*

Установленное свойство десятичных логарифмов позволяет широко использовать их в вычислительной практике.

Пример 1. Известно, что $\lg 2\approx 0{,}3010$. Найти $\lg 4$, $\lg 8$, $\lg 20$, $\lg 5$.

Решение. Так как $4=2^2$, $8=2^3$, то

$$\lg 4=2\lg 2\approx 0{,}6020;\ \lg 8=3\lg 2\approx 0{,}9030.$$

Так как $20=2\cdot 10$, то $\lg 20\approx 1{,}3010$.

Так как $5=\frac{10}{2}$, то $\lg 5=\lg 10-\lg 2=1-\lg 2\approx 0{,}6990$.

Пример 2. Сколько цифр содержит число 2^{75}?

Решение. Вычисляя $\lg 2^{75}$, имеем

$$\lg 2^{75}=75\cdot\lg 2\approx 75\cdot 0{,}3010=22{,}5750.$$

Следовательно, характеристика этого десятичного логарифма равна 22. Поэтому $2^{75}=a\cdot 10^{22}$, где $1\leqslant a<10$, a — целое число, и, значит, число 2^{75} содержит 23 цифры.

§ 7. Решение уравнений и неравенств, содержащих показательную и логарифмическую функции

Рассмотрим показательное уравнение вида

$$a^u=a^v,$$

где a — заданное положительное число, не равное 1, а один из показателей u и v или оба содержат неизвестное x.

Из равенства степеней с одинаковыми основаниями, не равными 1, вытекает равенство их показателей, т. е. $u=v$, и наоборот.

Рассмотрим логарифмическое уравнение вида

$$\log_a u=\log_a v,$$

где a — заданное положительное число, не равное 1, а одно из чисел $u>0$ и $v>0$ или оба содержат неизвестное x.

Из равенства логарифмов с одинаковыми основаниями вытекает равенство чисел, т. е. $u=v$ при условии $u>0$ и $v>0$, и наоборот.

При решении показательных и логарифмических неравенств нужно использовать общие свойства неравенств, свойство монотонности показательной и логарифмической функций. Кроме того, следует учитывать область определения логарифмической функции и свойство положительности показательной функции.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение $3^{2x-1}=81^{1-x}$.

Решение. Приведем степени к основанию 3:

$$3^{2x-1}=(3^4)^{1-x} \text{ или } 3^{2x-1}=3^{4-4x},$$

откуда $2x-1=4-4x$; $x=\frac{5}{6}$.

Пример 2. Решить уравнение $7^x=5^x$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 5^x (такое деление возможно, так как $5^x>0$ при любом x), получим $\left(\frac{7}{5}\right)^x=1$, откуда $x=0$.

Пример 3. Решить уравнение $9^x-2\cdot 3^x-3=0$.

Решение. Пусть $3^x=y$. Тогда $9^x=(3^x)^2=y^2$. Получаем уравнение $y^2-2y-3=0$, откуда $y_1=3$; $y_2=-1$.

Если $y=3$, то $3^x=3$, следовательно, $x=1$. Если $y=-1$, то $3^x=-1$ и корней нет, так как $3^x>0$ при любом x.

Ответ. $x=1$.

Пример 4. Решить неравенства: а) $3^{x^2-x}<9$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}>4$.

Решение. а) Имеем $3^{x^2-x}<3^2$. Отсюда по свойству степени с основанием больше 1 $x^2-x<2$ или $x^2-x-2<0$. Решая квадратное неравенство, находим $-1<x<2$.

б) Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Отсюда по свойству степени с основанием меньше 1 $\frac{1}{x}<-2$ или $\frac{2x+1}{x}<0$, т. е. $\frac{x(2x+1)}{x^2}<0$.

Решая квадратное неравенство $x(2x+1)<0$, находим

$$-\frac{1}{2}<x<0.$$

Пример 5. Решить неравенство $4^x-6\cdot 2^x+8<0$.

Решение. Пусть $2^x=y$. Тогда $y^2-6y+8<0$, откуда $2<y<4$ или $2<2^x<2^2$. Итак, $1<x<2$ — решение данного неравенства.

Пример 6. Решить уравнение $\lg(x^2-17)=\lg(x+3)$.

Решение. Из равенства десятичных логарифмов следует равенство $x^2-17=x+3$, если $x^2-17>0$ и $x+3>0$. Решая уравнение $x^2-x-20=0$, получаем $x_1=5$, $x_2=-4$. Проверяя выполнение условия $x^2-17>0$ и $x+3>0$, убеждаемся, что $x=-4$ не является корнем исходного уравнения.

Пример 7. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+2}{x-2}>0.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+2}{x-2}>\log_{\frac{1}{2}}1.$$

По свойству логарифмов с основанием меньше 1

$$0<\frac{x+2}{x-2}<1.$$

Решая неравенство

$$\frac{x+2}{x-2}>0 \quad \text{или} \quad (x+2)(x-2)>0,$$

получим $x<-2$, $x>2$.

Решая неравенство

$$\frac{x+2}{x-2}<1 \quad \text{или} \quad \frac{4}{x-2}<0,$$

получим $x<2$.

Учитывая ранее найденное, имеем $x<-2$.

Ответ. $x<-2$.

Упражнения

Раздел I

1. Последовательность задана формулой ее n-го члена: $a_n=10-3n$. Доказать, что a_n — арифметическая прогрессия.

2. Сколько надо взять членов арифметической прогрессии 18; 16; 14; ..., чтобы их сумма была равна нулю?

3. Решить уравнение $1+6+11+\ldots+x=148$.

4. Доказать, что если положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ также образуют арифметическую прогрессию.

5. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

6. Определить число членов геометрической прогрессии (a_n), если $a_1=3$, $a_n=96$, $S_n=189$.

7. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 21. Если второе число уменьшить на 1, а третье увеличить на 1, то получатся три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти эти числа.

8. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 56. Если из них вычесть соответственно 1; 7; 21, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

9. Найти $x=\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$ и $y=2^{\log_4 9+1}$.

10. Прологарифмировать по основанию 10

$$x=\left(\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{3a^2b}}\right)^4; \quad y=2a^5b^2c^4,$$

если $a>0$, $b<0$, $c>0$.

Решить уравнения (№ 11—19):

11. $2^{4x}-50\cdot 2^{2x}=896$. 12. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

13. $0{,}1^{x+1}+0{,}01^x=0{,}02$. 14. $2^{1\sqrt{x}}-5\cdot 2^{0{,}5\sqrt{x}}=24$.

15. $4^{x+1\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+1\sqrt{x^2-2}-1}=6$. 16. $\lg x^2=2\lg x$.

17. $\frac{\lg x-5}{2}+\frac{13-\lg x}{3}=2$.

18. $\lg(3x-2)+\lg(5x+2)=\lg(10x-3)$.

19. $\lg^2 x-5\lg x=2(1-2\lg x)$.

Решить неравенства (№ 20—25):

20. $(0{,}5)^{x^2}>(0{,}5)^x$. 21. $3^{x^2}>81$. 22. $\lg(x-5)<\lg(3x+7)$.

23. $\lg(8-x)\geqslant\lg(x^2+2)$. 24. $\log_{0,5}(x-2)>\log_{0,5}x^2$.

25. $\log_a x+\log_a(x+1)\leqslant\log_a(2x+6)$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Раздел II

26. Возрастающей или убывающей является последовательность, заданная формулой общего члена:

а) $a_n=\frac{n}{n+3}$; б) $a_n=\frac{3n}{n^2}$?

27. Последовательность задана формулой общего члена: $a_n=n^2-1$. Доказать, что (a_n) не является арифметической прогрессией.

28. Найти сумму всех двузначных чисел от 21 до 50.

29. Между числами 3 и 24 вставить 6 средних арифметических так, чтобы образовавшаяся числовая последовательность являлась арифметической прогрессией.

30. Найти сумму n членов арифметической прогрессии, m-й член которой равен $a-2bm$.

31. Третий член арифметической прогрессии равен 25, а десятый —3. Найти первый член и разность.

32. Найти разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 100, а сумма шести первых членов в 5 раз больше суммы последующих шести членов.

33. Доказать, что если a^2, b^2, c^2 составляют арифметическую прогрессию, то дроби $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ и $\frac{1}{a+b}$ также составляют арифметическую прогрессию.

34. Два тела начинают одновременно двигаться навстречу друг другу. Первое проходит 10 см в секунду, а второе в первую секунду прошло 3 см, а в каждую последующую проходило на 5 см больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд после начала движения тела встретятся, если между ними было расстояние 153 см?

35. Числа градусов, содержащихся в последовательных внутренних углах некоторого многоугольника составляют арифметическую прогрессию с разностью $d=10°$. Наименьший угол этого многоугольника равен 100°. Сколько сторон в этом многоугольнике?

36. Первый член геометрической прогрессии равен 1. Сумма третьего и пятого членов равна 90. Найти знаменатель прогрессии.

37. Найти четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, если первое число больше второго на 36, а третье больше четвертого на 4.

38. Если из четырех неизвестных чисел, составляющих геометрическую прогрессию вычесть соответственно 2, 7, 9 и 5, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти члены арифметической прогрессии.

39. Вычислить:

а) $10^{-\frac{1}{3}\lg\frac{1}{8}-2}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 25-2}$.

40. Прологарифмировать выражение по основанию 10

$$\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}}, \text{ если } a>0,\ b>0.$$

41. Зная, что $\lg 3\approx 0{,}48$, $\lg 5\approx 0{,}70$, найти логарифмы чисел 1,5; $\frac{3}{5}$; 0,12; $\frac{5}{9}$.

Решить уравнения (№ 42—51):

42. $3^x-5^{x+2}=3^{x+1}-5^{x+3}$. **43.** $3^{2x+5}=3^{x+2}+2$.

44. $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5}$.

45 (устно). $\lg(2x-x^2+10)=1{,}1-10^{\lg 0{,}6-\lg 6}$.

46. $\lg(x-6)+2\lg\sqrt{2x+5}=2$. **47.** $0{,}1\lg^4 x-\lg^2 x+0{,}9=0$.

48. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}$. **49.** $2^{3x}+8\cdot 2^x=6\cdot 2^{2x}$.

50. $2^{x^2}+2^{1-x^2}=\frac{9}{2}$. **51.** $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0$.

Решить системы уравнений (№ 52, 53):

52. $\begin{cases} 2^{\log_2 y}-\log_3 x=1, \\ y\log_3 x=2. \end{cases}$ **53.** $\begin{cases} \log_3(y-x)=0, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

Решить неравенства (№ 54—60):

54. $\log_{\frac{1}{2}}(2-3x)>-2$. **55.** $8>2^{\log_2(3-5x)}$.

56. $(0{,}04)^{5x-x^2-8}<625$. **57.** $9^{x+1}+3^{x+2}-18>0$.

58. $\lg(x^2+2x+2)>1$. **59.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}<\left(\frac{1}{9}\right)^{16+x}$.

60. $\log_2\frac{6x+8+x^2}{x^2+3x+2}<0$.

Глава IX. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

§ 1. Основные понятия геометрии

Геометрия — это наука о свойствах геометрических фигур. Геометрия, как и всякая другая наука, возникла из практических потребностей человечества.

В школьном курсе геометрии к основным или начальным понятиям относятся точка, прямая, плоскость и расстояние. Эти понятия являются неопределяемыми, такими же, как и понятия множества, числа и величины в курсе алгебры.

Точки обозначаются буквами A, B, C, ..., а прямые — буквами a, b, c, ... Для расстояния от точки A до точки B принято обозначение $|AB|$.

Всякая геометрическая фигура составлена из точек. Свойства геометрической фигуры выражаются аксиомами и теоремами. *Аксиома* — это предложение, принимаемое без доказательства. *Теорема* — это предложение, истинность которого устанавливается путем логического рассуждения, т. е. доказательством.

Аксиомы выражают основные свойства простейших фигур, которые являются отправными свойствами в доказательстве других свойств. Мы не будем приводить всех аксиом и ограничимся некоторыми из них.

Аксиома 1. *Для любой прямой существуют точки, принадлежащие прямой, и точки, не принадлежащие прямой.*

Если A — точка и a — прямая, то либо $A \in a$, либо $A \notin a$. В первом случае говорят, что прямая a проходит через точку A, во втором случае — прямая a не проходит через точку A.

Аксиома 2. *Через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая.*

Отсюда следует, что две различные прямые имеют не более одной общей точки.

Говорят, что две прямые пересекаются, если они имеют только одну общую точку.

Аксиома 3. *Если две точки прямой принадлежат некоторой плоскости, то прямая принадлежит этой плоскости.*

Сформулируем свойства расстояний:

1) *Расстояние от точки A до точки B положительно, если точки различны, и равно нулю, если они совпадают:*

$$|AB| > 0, \text{ если } A \neq B, \quad \text{и} \quad |AB| = 0, \quad \text{если} \quad A = B.$$

2) *Расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B до точки A*:

$$|AB|=|BA|.$$

3) *Для любых трех точек A, B, C расстояние* $|AC|$ *меньше или равно сумме расстояний* $|AB|$ *и* $|BC|$:

$$|AC|\leqslant|AB|+|BC|.$$

Эти свойства принимаются без доказательства и являются аксиомами.

Теорема 1. *Для любых трех точек A, B, C расстояние* $|AC|$ *больше или равно разности расстояний* $|AB|$ *и* $|BC|$:

$$|AC|\geqslant|AB|-|BC|.$$

Доказательство. По свойству расстояний

$$|AB|\leqslant|AC|+|BC|.$$

Вычтем из обеих частей этого неравенства $|BC|$:

$$|AB|-|BC|\leqslant|AC|,$$

т. е.

$$|AC|\geqslant|AB|-|BC|.$$

Среди понятий геометрии, которые выбраны за основные, нет понятия «лежать между». Его можно определить, используя понятия «расстояние» и «точка».

Определение. Точка *M лежит между точками A и B*, если эти три точки различны и $|AM|+|MB|=|AB|$.

Будем считать, что три точки принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда одна из них лежит между двумя другими (рис. 85).

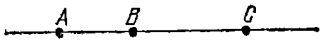


Рис. 85.

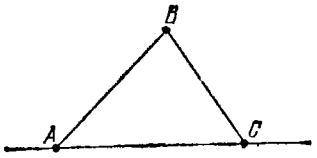


Рис. 86.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2 (неравенство треугольника). *Для любых точек A, B и C, не принадлежащих одной прямой, расстояние* $|AC|$ *меньше суммы расстояний* $|AB|$ *и* $|BC|$:

$$|AC|<|AB|+|BC|.$$

Доказательство. Пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой (рис. 86).

По свойству расстояний

$$|AC|\leqslant|AB|+|BC|,$$

т. е. либо $|AC|<|AB|+|BC|$, либо $|AC|=|AB|+|BC|$. Равенство $|AC|=|AB|+|BC|$ в нашем случае выполняться не может.

В самом деле, это равенство означает, что точка B лежит между точками A и C. Но тогда точки A, B и C принадлежали бы одной прямой. Это противоречит условию. Следовательно,

$$|AC|<|AB|+|BC|.$$

§ 2. Геометрические фигуры

Основными геометрическими фигурами на плоскости являются точка и прямая. Рассмотрим следующие геометрические фигуры: отрезок, луч, ломаная, угол, многоугольник, окружность и круг.

Отрезок. *Отрезком* AB называется геометрическая фигура, состоящая из двух различных точек A и B и всех точек, лежащих между ними, и обозначается $[AB]$ или AB. Точки A и B называются концами отрезка AB. Отрезок AB является частью прямой a, на которой лежат точки A и B (рис. 87).

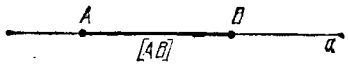


Рис. 87.

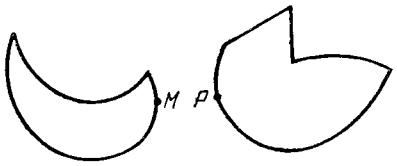


Рис. 88.

Длиной отрезка называется расстояние между его концами. Длина отрезка обозначается так же, как и расстояние между двумя точками — концами этого отрезка: $|AB|$.

В геометрии есть общее определение расстояния между двумя фигурами как наименьшего из всех возможных расстояний XY, где X — точка одной фигуры, а Y — точка другой фигуры.

Например, расстояние между двумя пересекающимися прямыми равно нулю. Расстояние между фигурами, лежащими в одной плоскости (рис. 88), есть расстояние $|MP|$.

Полуплоскость и луч. Основными свойствами расположения точек на прямой и плоскости назовем следующие свойства:

1) *Из трех различных точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими*;

2) *прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой* (рис. 89).

Возьмем на прямой a точку A и проведем через точку A какую-нибудь прямую b, отличную от a (рис. 90). Прямая b разобьет плоскость на две полуплоскости. Часть прямой a, лежащая в одной из этих полуплоскостей, называется *лучом* или *полупрямой*.

Точка A называется *начальной* точкой (или *началом*) луча. Лучи прямой a, на которые она разбивается точкой A, называются *дополнительными*.

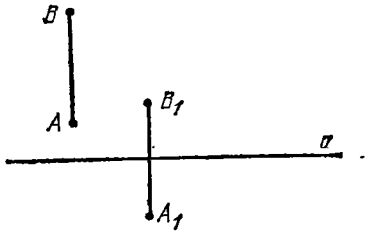


Рис. 89.

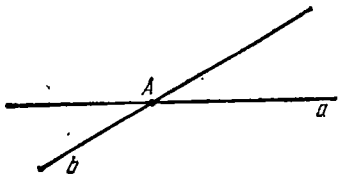


Рис. 90.

Ломаная. *Ломаной* $A_1A_2A_3\ldots A_n$ называется фигура, состоящая из отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, причем любые два отрезка, имеющие общий конец, не принадлежат одной прямой.

Точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются *вершинами* ломаной $A_1A_2\ldots A_n$, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$—*звеньями* ломаной. Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений. На рис. 91 изображена простая ломаная, а на рис. 92 — ломаная с самопересечением в точке B.

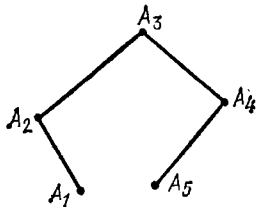


Рис. 91.

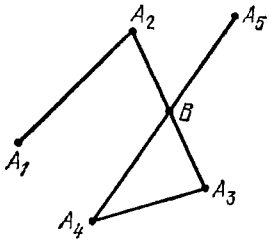


Рис. 92.

Длиной ломаной или *периметром* называется сумма длин ее звеньев.

Теорема 1. *Длина ломаной больше расстояния между ее концами.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда ломаная состоит из трех звеньев (рис. 93). Другие случаи доказываются аналогично. Точки A_1, A_2, A_3 по определению ломаной не лежат на одной прямой. Согласно теореме 2 § 1 (неравенство треугольника) имеем

$$|A_1A_2|+|A_2A_3|>|A_1A_3|.$$

По свойству расстояний для точек A_1, A_3, A_4

$$|A_1A_3|+|A_3A_4|\geqslant|A_1A_4|.$$

Поэтому

$$|A_1A_2|+|A_2A_3|+|A_3A_4|>|A_1A_4|,$$

что и требовалось доказать.

Угол. *Углом* называется фигура, которая состоит из двух различных лучей с общим началом. Эта начальная точка называется *вершиной* угла, а лучи—*сторонами* угла. Если стороны угла являются дополнительными лучами одной прямой, то угол называется *развернутым*.

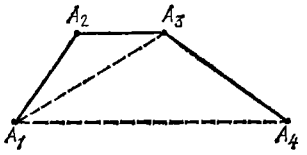


Рис. 93.

Угол обозначается тремя большими буквами, из которых средняя ставится у вершины, а две другие—у каких-нибудь точек сторон, или одной буквой, поставленной у вершины: $\angle AOB$ или $\angle O$ (рис. 94).

Говорят, что луч с началом в вершине $\angle AOB$ проходит между сторонами этого угла, если он пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла (рис. 95). В случае развернутого угла будем считать, что любой луч с началом в вершине угла, отличный от его сторон, проходит между сторонами угла.

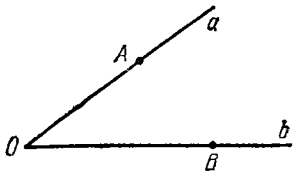


Рис. 94.

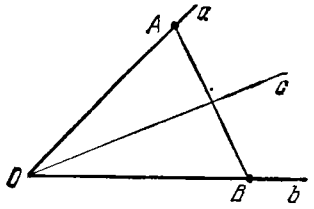


Рис. 95.

Измеряя отрезок, мы находим его длину. Измеряя угол, мы находим его величину или меру. Величина $\angle AOB$ обозначается $\widehat{AOB}$.

Основные свойства измерения отрезков:

1) *каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля;*

2) *если точка C прямой AB лежит между точками A и B, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.*

Основные свойства измерения углов:

1) *каждый угол имеет определенную величину* (или *градусную меру*); *величина развернутого угла равна* 180 *градусам*;

2) *если луч OC проходит между сторонами угла AOB, то величина угла AOB равна сумме величин углов AOC и BOC.*

Угол величиной в один градус (1°)—это угол, величина которого меньше величины развернутого угла в 180 раз. Применяются и другие единицы для измерения углов: минуты и секунды. Одна минута (1′) составляет $\frac{1}{60}$ часть градуса. Одна секунда (1″) составляет $\frac{1}{60}$ часть минуты или $\frac{1}{360}$ часть градуса.

Угол, в два раза меньший по величине по сравнению с развернутым, называется *прямым* углом (рис. 96). Углы AOC и BOC — прямые: $\widehat{AOC} = 90°$, $\widehat{BOC} = 90°$. Величину прямого угла иногда обозначают буквой d.

Два отрезка называются *равными*, если они имеют одинаковую длину. Два угла называются *равными*, если они имеют одинаковую величину (или градусную меру). На любом луче из его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только

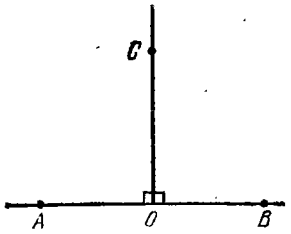


Рис. 96.

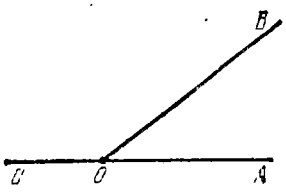


Рис. 97.

один. От любого луча в данной полуплоскости можно отложить угол, равный данному, и притом только один. Из двух не равных углов будем считать большим тот, который имеет большую величину.

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными лучами. На рис. 97 углы AOB и BOC смежные.

Теорема 2. *Сумма величин смежных углов равна* 180°.

Доказательство. Луч OB (рис. 97) проходит между сторонами развернутого угла. Поэтому $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180°$, что и утверждалось.

Из теоремы 2 следует, что если два угла равны, то смежные с ними углы равны.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого. Углы AOB и COD, BOD и AOC, образованные при пересечении двух прямых, являются вертикальными (рис. 98).

Теорема 3. *Вертикальные углы равны.*

Доказательство. Рассмотрим вертикальные углы AOB и COD (см. рис. 98). Угол BOD является смежным для каждого из углов AOB и COD. По теореме 2

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOD} = 180°, \quad \widehat{COD} + \widehat{BOD} = 180°.$$

Отсюда заключаем, что $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. Равенство вертикальных углов доказано.

Из теоремы 2 следует также, что угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.

Угол, величина которого меньше 90°, называется *острым* углом. Угол, величина которого больше 90°, называется *тупым* углом. Так как сумма величин смежных углов равна 180°, то угол, смежный с острым, тупой, а смежный с тупым, острый.

При пересечении двух прямых образуется четыре угла. Если один из углов прямой, то остальные углы тоже прямые. В этом случае прямые называются *взаимно перпендикулярными* (рис. 99).

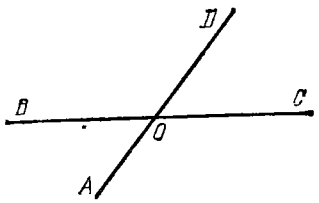


Рис. 98.

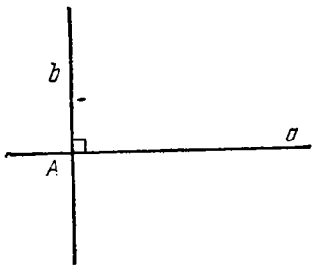


Рис. 99.

Запись $a \perp b$ означает перпендикулярность прямых a и b. Каждая из двух взаимно перпендикулярных прямых называется *перпендикуляром* к другой из них. Через каждую точку прямой можно провести и притом только одну прямую, перпендикулярную к ней (свойство единственности перпендикуляра к прямой). В самом деле, от луча прямой a с началом в точке A (см. рис. 99) можно отложить и притом только один угол, равный 90°.

Многоугольник. Ломаная называется *замкнутой*, если у нее концы совпадают. Простая замкнутая ломаная называется *многоугольником*. При этом вершины ломаной называются *вершинами* многоугольника, а звенья ломаной — *сторонами* многоугольника. Отрезки, соединяющие вершины многоугольника, не принадлежащие одной из его сторон, называются *диагоналями* многоугольника.

Во всяком многоугольнике число вершин равно числу сторон. Многоугольники разделяются на виды в зависимости от числа сторон. Многоугольник с тремя сторонами называется *треугольником*, многоугольник с четырьмя сторонами — *четырехугольником* и т. д.

Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой его стороны и ее продолжения. На рис. 100 изображен выпуклый пятиугольник, а на рис. 101 — не выпуклый четырехугольник. В выпуклом четырехугольнике диагонали пересекаются.

Фигуру, образованную многоугольником вместе с его внутренней областью, называют *многоугольной областью* (на рис. 102 заштрихована многоугольная область). Для выпуклого многоугольника отрезок, соединяющий любые две точки многоугольной области, целиком ей принадлежит. Мы будем рассматривать только выпуклые многоугольники.

Окружность и круг. *Окружностью с центром* O и *радиусом* R называется фигура, точками которой являются все точки плоскости, находящиеся на расстоянии R от точки O.

Радиусом называют также любой отрезок OM, соединяющий точку окружности с ее центром. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*. На рис. 103 OM — радиус окружности, AB — хорда, CD — диаметр.

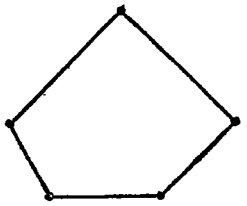


Рис. 100.

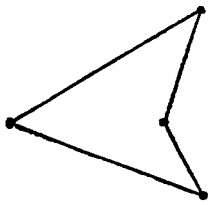


Рис. 101.

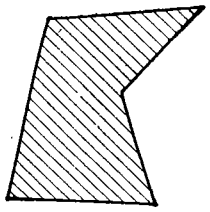


Рис. 102.

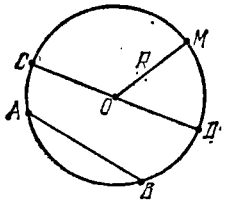


Рис. 103.

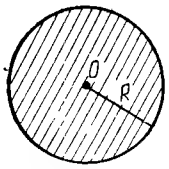


Рис. 104.

Кругом радиуса R *с центром* O называется часть плоскости, все точки которой находятся от точки O на расстоянии, не большем R (рис. 104). Границей круга является окружность с теми же центром и радиусом.

Геометрия разделяется на планиметрию и стереометрию. Планиметрия изучает свойства фигур на плоскости, а стереометрия — свойства фигур в пространстве. В гл. X—XVII мы будем изучать планиметрию, а в гл. XVIII — элементы стереометрии.

Упражнения

1. Отрезок AD разделен на три отрезка, длины которых относятся, как $2:3:4$. Расстояние между серединами крайних частей равно 5,4 см. Определить длину отрезка AD.

2. На сторонах BM и BN угла MBN взяты соответственно точки A, D и C, E, причем $AB > DB$ и $CB > EB$. Доказать, что $AB + BC > AD + DE + EC$.

3. На прямой a от точки O отложены два отрезка: $OA = 12$ см и $OB = 16$ см. Каким может быть расстояние между серединами отрезков OA и OB?

4. Из вершины тупого угла проведены перпендикуляры к его сторонам; угол между этими перпендикулярами равен $\frac{4}{7}d$. Определить величину тупого угла.

§ 1. Треугольники

Треугольник и его элементы. *Треугольником* называется многоугольник, имеющий три стороны. Треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC, AC обозначается $\triangle ABC$ (рис. 105).

Углом (или внутренним углом) $\triangle ABC$ при вершине A называется угол, образованный лучами AB и AC. Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C.

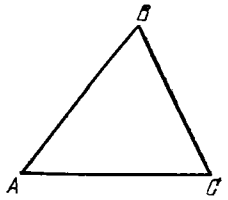


Рис. 105.

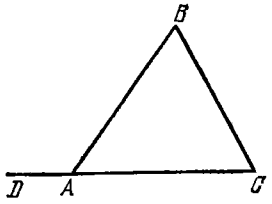


Рис. 106.

Если продолжить одну из сторон за вершину треугольника, то получим *внешний* угол треугольника. На рис. 106 $\angle BAD$ — внешний угол $\triangle ABC$. Любой внешний угол является смежным с одним из внутренних углов треугольника.

Биссектрисой треугольника называется отрезок, делящий внутренний угол треугольника пополам и проведенный до пересечения с противоположной стороной.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины на противоположную сторону или на ее продолжение (рис. 107, *а*, *б*). На рис. 107 отрезок BD — высота $\triangle ABC$.

Замечание. В этом параграфе будет доказано, что из любой точки, не лежащей на прямой, можно опустить перпендикуляр на эту прямую.

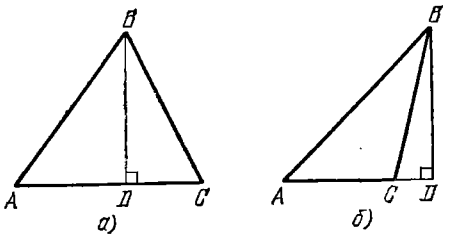


Рис. 107.

В любом треугольнике можно провести по три биссектрисы, медианы и высоты. В общем случае биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной и той же вершины треугольника, не совпадают.

Треугольники разделяются на виды по сравнительной длине их сторон или по величине их углов. В зависимости от длины сторон различают *разносторонние*, когда все стороны различной длины, и *равнобедренные*, когда две стороны равны; в частности,

равнобедренный треугольник называется *равносторонним* или *правильным*, когда все три его стороны равны между собой.

В зависимости от величины углов различают *остроугольные* треугольники, когда все углы острые, *прямоугольные*, когда среди углов треугольника есть прямой, и *тупоугольные*, когда среди углов треугольника есть тупой. В прямоугольном треугольнике стороны, образующие прямой угол, называются *катетами*, а сторона, лежащая против прямого угла — *гипотенузой*.

Признаки равенства треугольников. Свойства равнобедренного треугольника. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *равными*, если у них $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$ (рис. 108).

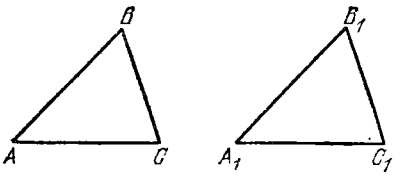


Рис. 108.

Для обозначения равенства треугольников используется запись: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. При этом имеет значение порядок, в котором записываются вершины треугольника. Согласно определению равенство $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ означает, что $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, ... А равенство $\triangle ABC=\triangle B_1A_1C_1$ означает уже другое: $\angle A=\angle B_1$, $\angle B=\angle A_1$, ... Таким образом, в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны и, обратно, против равных сторон лежат равные углы.

Первый признак равенства треугольников. *Если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, то эти треугольники равны, т. е.* $\angle C=\angle C_1$, $\angle B=\angle B_1$, $BC=B_1C_1$.

Этот признак принимается без доказательства и является аксиомой. Пользуясь им, будем доказывать другие признаки равенства треугольников. Можно сформулировать первый признак равенства треугольников следующим образом.

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

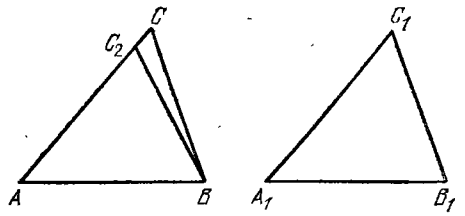


Рис. 109.

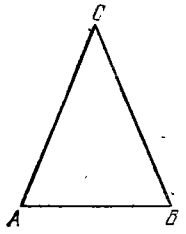


Рис. 110.

Теорема 1 (второй признак равенства треугольников). *Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, то треугольники равны, т. е.* $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle C=\angle C_1$ (рис. 109).

Доказательство. Отложим на луче AC отрезок AC_2, равный A_1C_1. Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC_2 равны по первому признаку равенства: $AB=A_1B_1$ и $\angle A=\angle A_1$ по условию, а $AC_2=A_1C_1$ по построению. Из равенства этих треугольников следует равенство углов $A_1B_1C_1$ и ABC_2, а угол $A_1B_1C_1$ равен углу ABC по условию.

Углы ABC и ABC_2 отложены в одну полуплоскость от луча BA. Из равенства углов следует, что их стороны BC и BC_2 совпадают, значит, точки C и C_2 совпадают. Таким образом, треугольник ABC совпадает с треугольником ABC_2, а значит, равен треугольнику $A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Можно сформулировать второй признак равенства треугольников следующим образом.

Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пусть $\triangle ABC$ — равнобедренный с равными сторонами AC и BC. Эти равные стороны называются *боковыми* сторонами, а третья сторона называется *основанием* треугольника (рис. 110).

Теорема 2. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Доказательство. $\triangle CAB=\triangle CBA$ по первому признаку равенства треугольников. В самом деле $CA=CB$, $CB=CA$, $\angle C=\angle C$. Из равенства треугольников следует, что $\angle A=\angle B$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.*

Дано: $\angle A=\angle B$ (см. рис. 110). Требуется доказать, что $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Доказательство. Треугольники ABC и BAC равны по второму признаку равенства треугольников. В самом деле, $AB=BA$, $\angle B=\angle A$, $\angle A=\angle B$. Из равенства треугольников следует, что $AC=BC$. Теорема доказана.

Теорема 3 является обратной теореме 2.

Теорема 4. *В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.*

Дано: $CA=CB$, CD — медиана (рис.111). Требуется доказать, что медиана CD есть биссектриса и высота $\triangle ABC$.

Доказательство. $\triangle CAD=\triangle CBD$ по первому признаку равенства треугольников. В самом деле $CA=CB$ по условию, $\angle CAD=\angle CBD$ по теореме 2, $AD=BD$, так как CD — медиана. Из равенства треугольников следует равенство углов: $\angle ACD=\angle BCD$; $\angle ADC=\angle BDC$. Так как $\angle ACD=\angle BCD$, то CD — биссектриса. Так как углы ADC и BDC смежные и равные, то они прямые, и значит, CD — высота треугольника. Теорема доказана.

Теоремы 2, 3 и 4 выражают свойства равнобедренного треугольника.

Теорема 5 (третий признак равенства треугольников). *Если у треугольников* ABC *и* $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, *то треугольники равны, т. е.* $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$.

Доказательство. Если $\angle A=\angle A_1$ или $\angle B=\angle B_1$ (рис. 112), то треугольники равны по первому признаку равенства

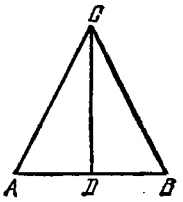


Рис. 111.

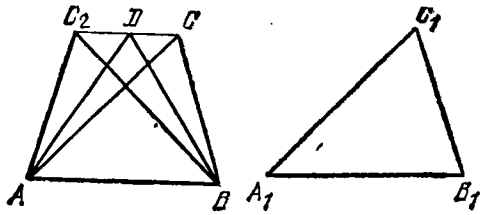


Рис. 112.

треугольников. Допустим, что $\angle A\neq\angle A_1$, $\angle B\neq\angle B_1$. Отложим от луча AB в полуплоскость, где лежит точка C, угол, равный $\angle A_1$, и на его стороне отрезок AC_2, равный A_1C_1.

Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC_2 равны по первому признаку равенства треугольников. В самом деле, $AB=A_1B_1$ по условию, а $A_1C_1=AC_2$ и $\angle B_1A_1C_1=\angle BAC_2$ по построению. Из равенства треугольников следует, что $BC_2=B_1C_1$.

Треугольники CC_2A и CC_2B равнобедренные с общим основанием CC_2. Пусть D—середина отрезка CC_2. Точка D не лежит на прямой AB, так как отрезок CC_2 не пересекает эту прямую. Следовательно, прямые AD и BD различны.

По теореме 4 прямые AD и BD перпендикулярны прямой CC_2. Однако через точку D можно провести только одну прямую, перпендикулярную прямой CC_2 (свойство единственности перпендикуляра к прямой). Допустив, что $\angle A\neq\angle A_1$ и $\angle B\neq\angle B_1$, мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Итак, *если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Соотношения между углами и сторонами треугольника.

Теорема 6. *Сумма величин любых двух внутренних углов треугольника меньше* 180°.

Доказательство. Докажем, что сумма величин углов при вершинах B и C $\triangle ABC$ меньше 180° (рис. 113).

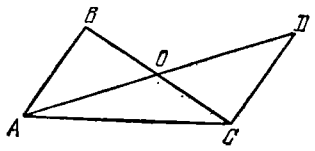


Рис. 113.

Через середину O стороны BC проведем медиану AO и на ее продолжении отложим отрезок OD, равный отрезку AO. По первому признаку равенства треугольников $\triangle AOB=\triangle DOC$: углы при вершине O равны, как вертикальные, $AO=OD$ и $BO=OC$ по построению. Из равенства треугольников следует, что $\angle ABO=\angle OCD$. Величина угла ACD равна сумме величин

углов ACB и OCD, так как луч CO проходит между сторонами угла ACD. Так как $\angle OCD = \angle ABC$, то

$$\widehat{ACD} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}.$$

Угол ACD не развернутый, так как точка D не лежит на прямой AC. Значит, $\widehat{ACD} < 180°$. Поэтому $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < 180°$. Теорема доказана.

Следствие. *В любом треугольнике два внутренних угла острые.*

Теорема 7. *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.*

Доказательство. Докажем, что внешний угол BCD $\triangle ABC$ больше любого из внутренних углов A и B, не смежных с этим внешним (рис. 114).

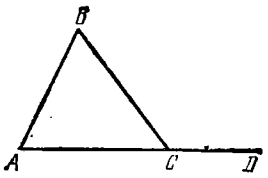


Рис. 114.

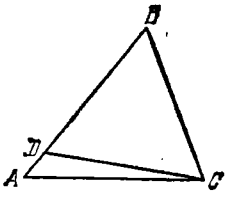


Рис. 115.

По свойству смежных углов $\widehat{BCD} + \widehat{ACB} = 180°$.

По теореме 6 $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} < 180°$, $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} < 180°$. Отсюда следует, что $\widehat{BCD} > \widehat{BAC}$, $\widehat{BCD} > \widehat{ABC}$. Теорема доказана.

Между сравнительной величиной углов треугольника и сравнительной длиной его сторон существуют соотношения. Мы уже знаем, что против равных сторон в треугольнике лежат равные углы и, обратно, против равных углов в треугольнике лежат равные стороны (свойства равнобедренного треугольника).

Теорема 8. *Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол и, обратно, против большего угла в треугольнике лежит большая сторона.*

Доказательство. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 115) сторона AB больше стороны BC, т. е. $|AB| > |BC|$. Требуется доказать, что угол C больше угла A, т. е. $\widehat{BCA} > \widehat{BAC}$. Отложим на большей стороне BA от вершины B отрезок BD, равный меньшей стороне BC, и соединим точки C и D отрезком CD. Тогда получим равнобедренный $\triangle DBC$, у которого углы при основании равны, т. е. $\angle BDC = \angle BCD$. Угол BDC, как внешний по отношению к $\triangle ADC$, больше угла A, значит, и угол BCD больше угла A. Угол BCA больше угла BCD, следовательно, угол BCA больше угла A. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть в $\triangle ABC$ угол C больше угла A. Докажем, что сторона AB больше стороны BC. Допустим, что утверждение не-

верно. Тогда либо $AB=BC$, либо $AB<BC$. В первом случае $\triangle ABC$—равнобедренный и, следовательно, углы A и C при его основании равны. Но это противоречит условию: угол C больше угла A. Во втором случае $AB<BC$ и по доказанному угол A больше угла C, что также противоречит условию. Поэтому $AB>BC$. Теорема доказана полностью.

Из теоремы следует, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Из свойств расстояний (§ 1 гл. IX) следует, что в любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон и больше их разности. Предоставим читателю доказать это утверждение, используя теорему 8.

Признаки равенства прямоугольных треугольников. В прямоугольных треугольниках углы между катетами всегда равны, как углы прямые. Поэтому прямоугольные треугольники равны:

1) *если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого;*

2) *если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника.*

Эти два признака не требуют доказательства, так как они представляют частные случаи общих признаков равенства треугольников. Докажем еще два следующих признака, относящихся только к прямоугольным треугольникам.

Теорема 9. *Прямоугольные треугольники равны:*

1) *если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого;* или

2) *если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.*

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$—два прямоугольных треугольника с прямыми углами C и C_1.

1) Дано: $AB=A_1B_1$ и $\angle A=\angle A_1$. Докажем, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Если при этом $AC=A_1C_1$, то треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Допустим, что $AC\neq A_1C_1$. Например, $A_1C_1<AC$. Отложим отрезок AC_2, равный A_1C_1 (рис. 116). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ равны, так как $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$ по условию, а $AC_2=A_1C_1$ по построению. Из равенства треугольников следует, что угол AC_2B прямой. Следовательно, угол CC_2B прямой, как смежный к прямому углу. Мы пришли к противоречию: в $\triangle CBC_2$ два прямых угла, а это невозможно. Значит, $AC=A_1C_1$, а в этом случае $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

2) Дано: $AB=A_1B_1$ и $BC=B_1C_1$. Докажем, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Если при этом $AC=A_1C_1$, то треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

Допустим, что $AC\neq A_1C_1$. Например, $A_1C_1<AC$. Отложим отрезок CA_2, равный C_1A_1 (рис. 117). $\triangle A_2BC=\triangle A_1B_1C_1$: у них

углы C и C_1 прямые, $BC = B_1C_1$ по условию, а $A_2C = A_1C_1$ по построению. Из равенства треугольников следует, что $BA_2 = B_1A_1$. В равнобедренном треугольнике ABA_2 угол при вершине A_2 тупой, как смежный к острому углу прямоугольного треугольника BCA_2. Значит, угол A тоже тупой, а это невозможно. Поэтому $AC = A_1C_1$, и, следовательно, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

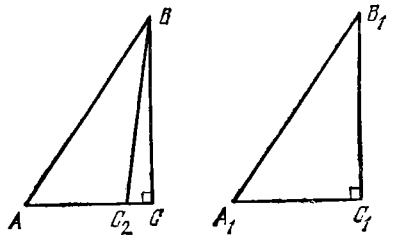


Рис. 116.

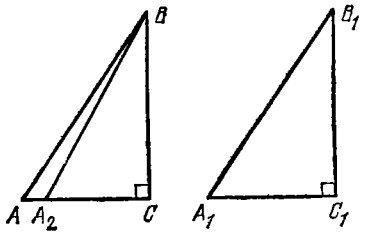


Рис. 117.

Предоставим читателю доказать следующий признак равенства прямоугольных треугольников: *прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1 равны, если $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$.*

Перпендикуляр и наклонная. Пусть a — прямая, B — точка вне прямой и A — точка на прямой a (рис. 118). Отрезок BA называется *перпендикуляром*, опущенным из точки B на прямую a, если прямые a и AB перпендикулярны. Точка A называется *основанием* перпендикуляра.

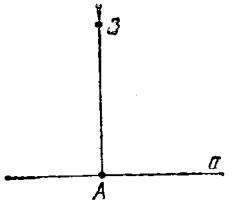


Рис. 118.

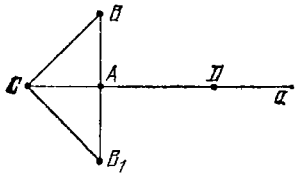


Рис. 119.

Теорема 10. *Из точки вне данной прямой можно провести к этой прямой перпендикуляр и притом только один.*

Доказательство. Пусть a — данная прямая и B — точка, не лежащая на этой прямой (рис. 119). Рассмотрим на прямой a какие-нибудь точки C и D. Если прямая BC перпендикулярна к прямой CD, то отрезок BC и есть перпендикуляр к прямой CD. Допустим, что прямая BC не перпендикулярна к прямой CD. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Точка B лежит в одной из них. Отложим в другую полуплоскость от прямой CD угол, равный углу BCD, и отложим на стороне этого угла отрезок CB_1, равный CB. Отрезок BB_1 пересекает прямую a в некоторой точке A. Треугольники CAB и CAB_1 равны,

так как у них сторона AC общая, а $\angle BCA = \angle B_1CA$ и $CB = CB_1$ по построению. Из равенства треугольников следует равенство смежных углов BAC и B_1AC. А если смежные углы равны, то они прямые. Следовательно, отрезок BA — перпендикуляр к прямой a.

Допустим теперь, что из точки B можно провести два перпендикуляра BA и BA_1 к прямой a. Тогда у треугольника BAA_1 будет два прямых угла: $\angle A$ и $\angle A_1$, но это невозможно. Значит, из точки B можно провести перпендикуляр к прямой и притом только один. Теорема доказана.

Пусть BA — перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, и C — любая точка на прямой a, отличная от A. Отрезок BC называется *наклонной*, проведенной из точки B к прямой a (рис. 120). Точка C называется *основанием* наклонной, а отрезок

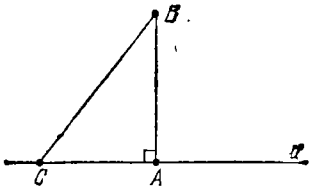


Рис. 120.

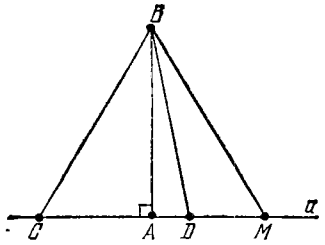


Рис. 121.

AC — *проекцией* наклонной. Из прямоугольного треугольника BAC с прямым углом A видим, что наклонная больше перпендикуляра. В этом треугольнике наклонная является гипотенузой, а перпендикуляр — катетом.

Расстоянием от точки B до прямой a, не проходящей через точку B, называется длина перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую a. Так как перпендикуляр меньше наклонной, проведенной из той же точки, то расстояние от точки B до прямой a является наименьшим из расстояний от точки B до любой из точек прямой a. Имеет место следующая теорема.

Теорема 11. *Если из одной и той же точки вне прямой проведены к этой прямой перпендикуляр и наклонные, то*

1) *если основания двух наклонных одинаково удалены от основания перпендикуляра, то такие наклонные равны;*

2) *если основания двух наклонных неодинаково удалены от основания перпендикуляра, то та из наклонных больше, основание которой дальше отстоит от основания перпендикуляра* (рис. 121).

Справедлива и обратная теорема. Формулировку обратной теоремы и доказательства обеих теорем предоставим читателю.

Свойства серединного перпендикуляра к отрезку и биссектрисы угла. *Серединным перпендикуляром* к отрезку называется прямая, перпендикулярная к этому отрезку и проходящая через его середину.

Теорема 12. *Множество всех точек плоскости, равноудаленных от концов данного отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.*

Доказательство. Нужно доказать два утверждения:

1) *точка, лежащая на серединном перпендикуляре к отрезку, равноудалена от его концов;*

2) *точка плоскости, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.*

Докажем оба утверждения.

1) Пусть p—серединный перпендикуляр к отрезку AB и точка O—середина отрезка AB (рис. 122).

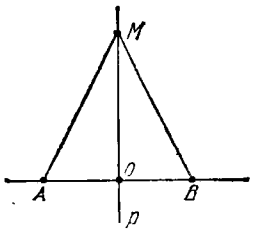


Рис. 122.

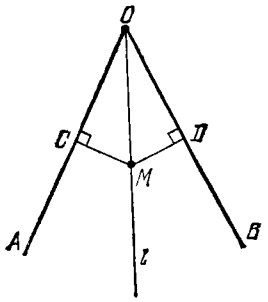


Рис. 123.

Рассмотрим произвольную точку M, лежащую на прямой p. Проведем отрезки AM и BM. Треугольники AOM и BOM равны: у них углы при вершине O прямые, катет OM общий, а катет OA равен катету OB по условию. Из равенства треугольников следует, что $AM=BM$.

2) Пусть точка M равноудалена от концов отрезка AB, т. е. $AM=BM$. Тогда $\triangle AMB$ равнобедренный. Проведем через точку M и середину отрезка AB прямую p. Отрезок MO по построению есть медиана равнобедренного $\triangle AMB$, а следовательно, и высота, т. е. прямая MO есть серединный перпендикуляр к отрезку AB. Теорема доказана.

Теорема 13. *Множество всех точек плоскости, равноудаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла.*

Доказательство. Нужно доказать два утверждения:

1) *точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от его сторон;*

2) *точка плоскости, равноудаленная от сторон угла, лежит на биссектрисе этого угла.*

Докажем оба утверждения.

1) Пусть l—биссектриса угла AOB (рис. 123).

Рассмотрим произвольную точку M, лежащую на луче l. Опустим из точки M перпендикуляры MC и MD на стороны угла AOB. Прямоугольные треугольники OMC и OMD равны: у

них гипотенуза OM общая, а углы COM и DOM равны по условию. Отсюда следует, что $MC = MD$.

2) Пусть точка M равноудалена от сторон угла AOB (см. рис. 123), т. е. перпендикуляры MC и MD к сторонам угла равны. Тогда $\triangle OMC = \triangle OMD$ по признаку равенства прямоугольных треугольников. Отсюда $\angle COM = \angle DOM$, и, следовательно, луч OM является биссектрисой угла AOB. Теорема доказана.

Итак, серединный перпендикуляр к отрезку есть множество точек плоскости, равноудаленных от концов этого отрезка, а биссектриса угла есть множество точек плоскости, равноудаленных от сторон этого угла.

Окружность можно определить как множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой ее центром.

§ 2. Основные геометрические построения

В задачах на построение будем рассматривать построение геометрической фигуры, которое можно выполнить с помощью линейки и циркуля. Решение задачи состоит не столько в построении фигуры, сколько в решении вопроса о том, как это сделать, и соответствующем доказательстве.

С помощью линейки можно провести произвольную прямую; произвольную прямую, проходящую через данную точку; прямую, проходящую через две данные точки.

С помощью циркуля можно описать из данного центра окружность данного радиуса. Циркулем можно отложить отрезок на данной прямой из данной точки.

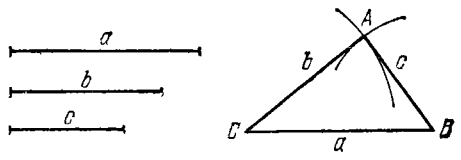


Рис. 124.

Рассмотрим основные задачи на построение.

Задача 1. Построить треугольник с данными сторонами a, b, c (рис. 124).

Решение. С помощью линейки проводим произвольную прямую и возьмем на ней произвольную точку B. Раствором циркуля, равным a, описываем окружность с центром B и радиусом a. Пусть C — точка ее пересечения с прямой. Раствором циркуля, равным c, описываем окружность из центра B, а раствором циркуля, равным b, — окружность из центра C. Пусть A — точка пересечения этих окружностей. $\triangle ABC$ имеет стороны, равные a, b, c.

Задача 2. Отложить на данном луче в данную полуплоскость угол, равный данному углу (рис. 125).

Решение. Проведем произвольную окружность с центром в вершине A данного угла. Пусть B и C — точки пересечения окружности со сторонами угла. Радиусом AB проведем окружность с центром в точке O — начальной точке данного луча. Точ-

ку пересечения этой окружности с данным лучом обозначим C_1. Опишем окружность с центром C_1 и радиусом BC. Точка B_1 пересечения двух окружностей лежит на стороне искомого угла. Это следует из равенства $\triangle ABC = \triangle OB_1C_1$.

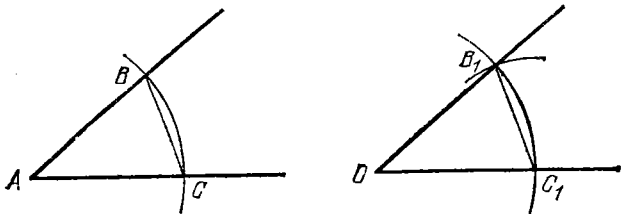


Рис. 125.

Задача 3. Построить биссектрису данного угла (рис. 126).

Решение. Из вершины A данного угла, как из центра, проводим окружность произвольного радиуса. Пусть B и C — точки ее пересечения со сторонами угла. Из точек B и C тем же радиусом описываем окружности. Пусть D — точка их пересечения, отличная от A. Луч AD делит угол A пополам. Это следует из равенства $\triangle ABD = \triangle ACD$.

Задача 4. Разделить данный отрезок пополам (рис. 127).

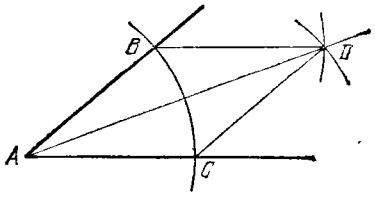


Рис. 126.

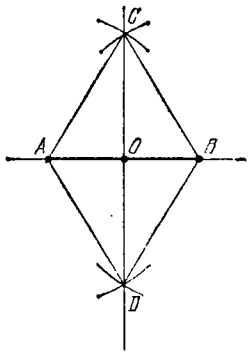


Рис. 127.

Решение. Из концов A и B данного отрезка AB описываем окружности радиусом AB. Пусть C и D — точки пересечения этих окружностей. Они лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Отрезок CD пересекает прямую AB в некоторой точке O. Эта точка и есть середина отрезка AB. В самом деле, $\triangle CAD = \triangle CBD$. Отсюда следует равенство $\angle ACO = \angle BCO$. Поэтому $\triangle ACO = \triangle BCO$, и, следовательно, $AO = BO$. Таким образом, O — середина отрезка AB.

Задача 5. Провести серединный перпендикуляр к данному отрезку.

Решается так же, как задача 4; прямая CD — серединный перпендикуляр к отрезку AB (см. рис. 127).

Задача 6. Из данной точки провести перпендикуляр к данной прямой.

Решение. Возможны два случая:

1) данная точка O лежит на данной прямой a (рис. 128);

2) данная точка O не лежит на данной прямой a (рис. 129).

1) Из точки O проводим произвольным радиусом окружность. Она пересекает прямую a в двух точках A и B. Из точек A и

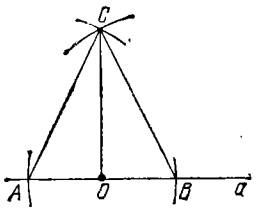


Рис. 128.

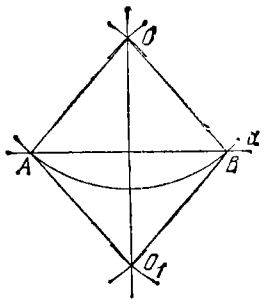


Рис. 129.

B проводим окружности радиусом AB. Пусть C—точка их пересечения. Получаем $OC \perp AB$. В самом деле, $\triangle ACB$—равнобедренный, $CA = CB$. Отрезок CO есть медиана этого треугольника, а, следовательно, и высота.

2) Из точки O проводим произвольным радиусом окружность, пересекающую прямую a в точках A и B. Из точек A и B тем же радиусом проводим окружности. Пусть O_1—точка их пересечения, отличная от O. Получаем $OO_1 \perp AB$. В самом деле, точки O и O_1 равноудалены от концов отрезка AB и, следовательно, лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

§ 3. Параллельные прямые

Определение параллельных прямых. Две различные прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной общей точки. В первом случае говорят, что прямые пересекаются, во втором случае—прямые не пересекаются. Дадим определение, соответствующее второму случаю взаимного расположения двух различных прямых на плоскости.

Определение. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$.

Пусть две прямые a и b пересечены третьей прямой c (рис. 130). Прямая c называется *секущей* по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух различных точках. При пересечении прямых a и b секущей c образуется восемь углов, которые на рис. 130 отмечены цифрами. Определенные пары углов имеют специальные названия: *соответственные* углы: *1* и *5*, *4* и *8*, *2* и *6*, *3* и *7*; *накрест лежащие* углы: *3* и *5*, *4* и *6*; *односторонние* углы: *4* и *5*, *3* и *6*.

Признаки параллельности двух прямых.

Теорема 1. *Если при пересечении двух прямых секущей:*

1) *накрест лежащие углы равны, или*

2) *соответственные углы равны, или*

3) *сумма величин односторонних углов равна* 180°, *то прямые параллельны* (рис. 131).

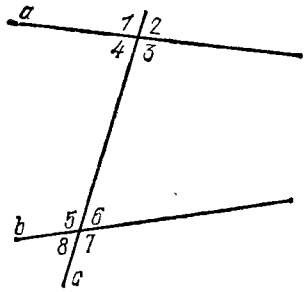


Рис. 130.

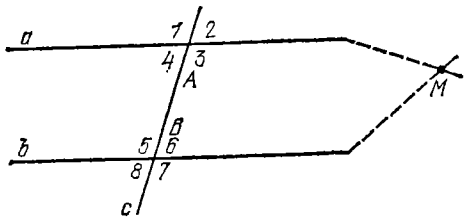


Рис. 131.

Доказательство. 1) Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы равны: $\angle 4 = \angle 6$. Докажем, что $a \parallel b$.

Предположим противное: прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке M, и, следовательно, один из углов 4 или 6 будет внешним углом $\triangle ABM$. Пусть для определенности $\angle 4$ — внешний угол $\triangle ABM$, а $\angle 6$ — внутренний. Из теоремы о внешнем угле треугольника следует, что $\angle 4$ больше $\angle 6$, а это противоречит условию, значит, прямые a и b не могут пересекаться, поэтому они параллельны. Признак параллельности двух прямых для этого случая доказан.

2) Пусть при пересечении прямых a и b секущей c соответственные углы равны. Например, $\angle 2 = \angle 6$. Докажем, что $a \parallel b$.

Вертикальные углы 2 и 4 равны. Значит, накрест лежащие углы 4 и 6 равны. Отсюда следует, что $a \parallel b$.

3) Пусть при пересечении прямых a и b секущей c сумма величин односторонних углов равна 180°: $\hat{3} + \hat{6} = 180°$. Докажем, что $a \parallel b$.

Углы 3 и 4 смежные. Потому $\hat{3} + \hat{4} = 180°$. Из равенств $\hat{3} + \hat{6} = 180°$ и $\hat{3} + \hat{4} = 180°$ следует равенство накрест лежащих углов 4 и 6: $\angle 4 = \angle 6$. Поэтому $a \parallel b$. Теорема доказана полностью.

Следствие. *Две различные прямые на плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.*

В самом деле, пусть прямые a и b перпендикулярны прямой p (рис. 132).

При пересечении прямых a и b секущей p накрест лежащие углы 4 и 6 прямые, поэтому они равны. Отсюда следует, что $a \parallel b$.

Задача. Построить прямую, проходящую через данную точку M и параллельную данной прямой a, не проходящей через точку M.

Решение. Проводим через точку M прямую p, перпендикулярно прямой a (задача 6 §2) (рис. 133). Затем проводим через точку M прямую b перпендикулярно прямой p. Прямая b параллельна прямой a согласно следствию из теоремы 1.

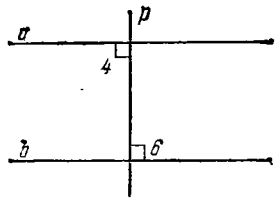


Рис. 132.

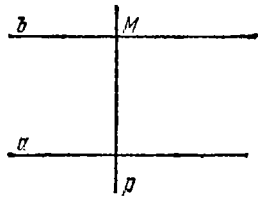


Рис. 133.

Свойства параллельных прямых. Из рассмотренной задачи следует важный вывод: через точку, не лежащую на данной прямой, всегда можно провести прямую, параллельную данной.

Основное свойство параллельных прямых состоит в следующем.

Аксиома о параллельных прямых. *Через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

Рассмотрим некоторые свойства параллельных прямых, которые следуют из этой аксиомы.

1) *Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую* (рис. 134).

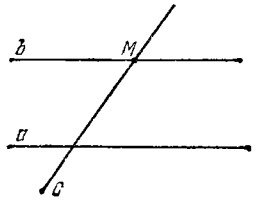


Рис. 134.

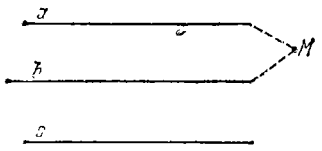


Рис. 135.

Пусть $a \parallel b$ и прямая c пересекает прямую b в точке M. Если бы прямая c не пересекала прямую a, то через точку M проходили бы две различные прямые b и c, параллельные прямой a. Так как это противоречит аксиоме о параллельных прямых, то прямая c пересекает и прямую a.

2) *Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны* (рис. 135).

Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Докажем, что $a \parallel b$.

Допустим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке M. Значит, через точку M проходят две различные прямые a и b, параллельные прямой c. Это про-

тиворечит аксиоме о параллельных прямых. Поэтому наше допущение неверно и прямые a и b параллельны.

Докажем теорему об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, обратную теореме 1.

Теорема 2. *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то*

1) *накрест лежащие углы равны;*

2) *соответственные углы равны;*

3) *сумма величин односторонних углов равна* 180°.

Доказательство. Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Докажем, например, что накрест лежащие углы 1 и 2 равны (рис. 136).

Допустим, что $\angle 1 \neq \angle 2$. Построим луч MP так, чтобы $\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащими углами при пересечении прямых MP и b секущей MN, причем $\angle PMN = \angle 2$. Так как

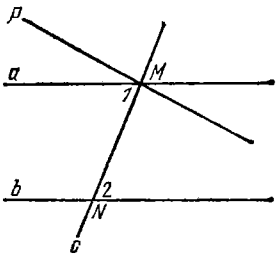


Рис. 136.

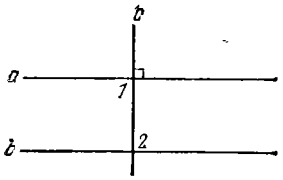


Рис. 137.

эти накрест лежащие углы равны, то прямые MP и b параллельны. Тогда две различные прямые MP и a проходят через точку M и параллельны прямой b. Это противоречит аксиоме о параллельных прямых. Значит, наше допущение неверно и $\angle 1 = \angle 2$. Из равенства накрест лежащих углов следует равенство соответственных углов и равенство суммы величин односторонних углов 180 градусам. Теорема доказана.

Следствие. *Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.*

Доказательство. Пусть $a \parallel b$ и $c \perp a$ (рис. 137). Прямая c пересекает a, значит, она пересекает прямую b, параллельную прямой a. При пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c образуются равные накрест лежащие углы: $\angle 1 = \angle 2$. Так как $c \perp a$, то $\widehat{1} = 90°$, поэтому $\widehat{2} = 90°$, т. е. $c \perp b$.

Предоставим читателю доказать следующие две теоремы.

Теорема (об углах с соответственно параллельными сторонами). *Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла (т. е. принадлежат параллельным прямым), то величины таких углов или равны, или в сумме составляют* 180°: $\widehat{1} = \widehat{2}$ *или* $\widehat{1} + \widehat{3} = 180°$ (рис. 138).

Теорема (об углах с соответственно перпендикулярными сторонами). *Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны*

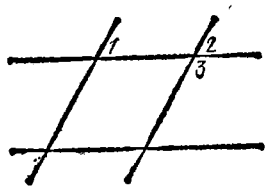


Рис. 138.

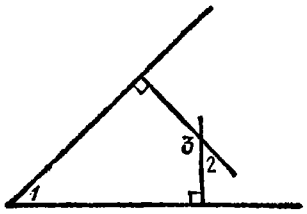


Рис. 139.

к сторонам другого угла, причем оба угла принадлежат одной и той же плоскости, то величины таких углов равны или в сумме составляют 180°: $\widehat{1}=\widehat{2}$ *или* $\widehat{1}+\widehat{3}=180°$ (рис. 139).

Сумма величин внутренних углов треугольника и многоугольника.

Теорема 3. *Сумма величин внутренних углов треугольника равна* 180°.

Доказательство. Пусть ABC—данный треугольник (рис. 140). Докажем, что $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$.

Через середину O стороны BC проведем медиану AO и на ее продолжении отложим отрезок OD, равный отрезку AO. По второму признаку равенства треугольников $\triangle AOB=\triangle DOC$: углы при вершине O равны, как вертикальные, $AO=OD$ и $BO=OC$ по построению. Из равенства треугольников следует, что $\angle ABO=\angle OCD$. Так как эти углы являются равными накрест лежащими углами при пересечении прямых AB и CD секущей BC, то прямые AB и CD параллельны.

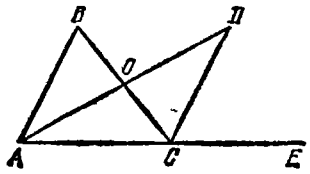


Рис. 140.

Рассмотрим луч CE, дополнительный к лучу CA. Угол A равен углу DCE, как соответственные углы при параллельных прямых AB и CD. Так как $\widehat{DCE}+\widehat{OCD}+\widehat{ACO}=180°$, то $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$. Теорема доказана.

Следствия. 1) *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*

В самом деле, из равенств $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$ и $\widehat{BCE}+\widehat{ACB}=180°$ получаем, что $\angle BCE=\angle A+\angle B$.

2) *Сумма величин острых углов прямоугольного треугольника равна* 90°.

3) *В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол имеет величину в* 45°.

4) *В равностороннем треугольнике каждый угол имеет величину в* 60°.

5) *Длина катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в* 30°, *равна половине длины гипотенузы.*

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом A и $\widehat{ABC}=30°$. Докажем, что $|AC|=\frac{1}{2}|BC|$ (рис. 141). Так как $\widehat{ABC}+\widehat{C}=90°$, то $\widehat{C}=60°$. Рассмотрим луч AD, дополнительный к лучу AC, и отложим на нем отрезок AD, равный отрезку AC.

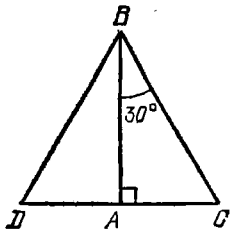


Рис. 141.

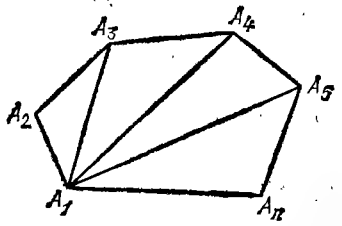


Рис. 142.

Прямоугольные треугольники ABC и ABD равны: катет AB общий, а катеты AC и AD равны по построению. Из равенства треугольников следует, что $\widehat{D}=\widehat{C}=60°$, $\widehat{ABD}=\widehat{ABC}=30°$, и поэтому $\widehat{DBC}=60°$. Значит, в $\triangle BCD$ углы DBC и BDC равны ($\widehat{DBC}=\widehat{BDC}=60°$), и следовательно, $DC=BC$. Так как $|AC|=\frac{1}{2}|DC|$, то $|AC|=\frac{1}{2}|BC|$, что и требовалось доказать.

Предоставим читателю доказать обратное утверждение: *если в прямоугольном треугольнике длина катета равна половине длины гипотенузы, то величина угла, лежащего против этого катета, равна* 30°.

Теорема 4. *Сумма величин внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна* 180° $(n-2)$.

Сумма величин внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 360°.

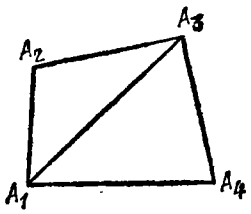


Рис. 143.

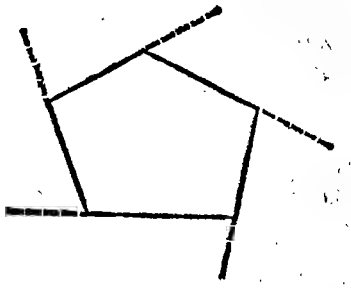


Рис. 144.

Доказательство. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — данный выпуклый многоугольник (рис. 142). Из какой-нибудь его вершины, например из вершины A_1, проведем диагонали многоугольника.

Тогда получим $n-2$ треугольника $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$. Сумма величин внутренних углов треугольника равна 180°. Поэтому сумма величин внутренних углов данного многоугольника равна $180°\ (n-2)$.

В частности, при $n=4$, т. е. для выпуклого четырехугольника, сумма величин внутренних углов равна 360° (рис. 143).

Внешним углом многоугольника является угол, смежный внутреннему (рис. 144). Так как сумма величин смежных углов равна $180°n$, то сумма величин внешних углов многоугольника равна $180°n-180°(n-2)=360°$. Теорема доказана.

§ 4. Четырехугольники

Будем рассматривать выпуклые четырехугольники с параллельными сторонами: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапецию.

Параллелограмм.

Определение. *Параллелограммом* называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых (рис. 145).

Теорема 1 (о свойстве сторон и углов параллелограмма). *В параллелограмме противоположные стороны равны, противоположные углы равны и сумма величин углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна* 180°.

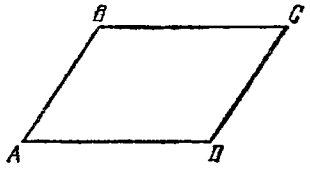


Рис. 145.

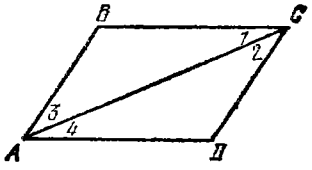


Рис. 146.

Доказательство. В данном параллелограмме $ABCD$ проведем диагональ AC и получим два треугольника ABC и ADC (рис. 146). Эти треугольники равны, так как $\angle 1=\angle 4$, $\angle 2=\angle 3$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых), а сторона AC общая. Из равенства $\triangle ABC=\triangle ADC$ следует, что $AB=CD$, $BC=AD$, $\angle B=\angle D$. Сумма величин углов, прилежащих к одной стороне, например углов A и D, равна 180°, как односторонних при параллельных прямых. Теорема доказана.

Замечание. Равенство противоположных сторон параллелограмма означает, что отрезки параллельных, отсекаемых параллельными, равны.

Следствие. *Если две прямые параллельны, то все точки одной прямой находятся на одном и том же расстоянии от другой прямой.*

Доказательство. В самом деле, пусть $a \parallel b$ (рис. 147). Проведем из каких-нибудь двух точек B и C прямой b перпендикуляры BA и CD к прямой a. Так как $AB \parallel CD$, то фигура $ABCD$ — параллелограмм, и следовательно, $AB = CD$.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется расстояние от произвольной точки одной из прямых до другой прямой. По доказанному оно равно длине перпендикуляра, проведенного из какой-нибудь точки одной из параллельных прямых к другой прямой.

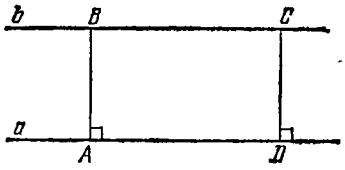


Рис. 147.

Следующая теорема дает признаки параллелограмма.

Теорема 2. *Если в выпуклом четырехугольнике:*

1) *противоположные стороны равны между собой, или*
2) *две противоположные стороны равны и параллельны, или*
3) *диагонали в точке пересечения делятся пополам,*

то такой четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство. 1) Пусть $ABCD$ — четырехугольник, у которого $AB = CD$, $BC = AD$ (см. рис. 146). Докажем, что $ABCD$ — параллелограмм, т. е. что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Проведем диагональ AC и получим два треугольника ABC и ADC. Так как AC — общая сторона, $AB = CD$, $BC = AD$ (по условию), то $\triangle ABC = \triangle ADC$. Поэтому $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$, а из равенства накрест лежащих углов следует параллельность прямых: $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$.

2) Доказательство предоставим читателю.

3) Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник и O — точка пересечения его диагоналей (рис 148). Треугольники AOB и COD

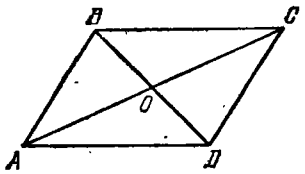


Рис. 148.

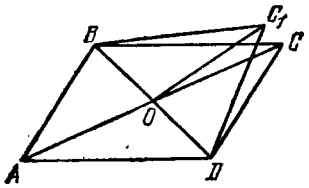


Рис. 149.

равны: у них углы при вершине O равны, как вертикальные, $OA = OC$, $OB = OD$ по условию. Следовательно, $AB = CD$ и $\angle OAB = \angle OCD$. Эти углы являются накрест лежащими при прямых AB и CD и секущей AC, значит $AB \parallel CD$. Итак, $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. Поэтому $ABCD$ — параллелограмм. Теорема доказана.

Теорема 3 (обратная теореме 2 § 3). *Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 149). Проведем его диагональ BD; точка O — середина диагонали BD. На продолжении отрезка AO отложим отрезок OC_1, равный AO. По теореме 2 § 3 четырехугольник ABC_1D является параллелограммом. Следовательно, прямая BC_1 параллельна прямой AD. Согласно аксиоме о параллельных прямых через точку B можно провести только одну прямую, параллельную AD. Поэтому прямая BC_1 совпадает с прямой BC. Так же доказывается, что прямая DC_1 совпадает с прямой DC. Так как прямые BC и DC имеют только одну общую точку C, то точка C_1 совпадает с точкой C. Параллелограмм ABC_1D совпадает с параллелограммом $ABCD$. Поэтому диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются и точки пересечения делятся пополам. Теорема доказана.

Прямоугольник, ромб, квадрат. *Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма; например, в прямоугольнике противоположные стороны равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам и т. д.

Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

Предоставим читателю доказать следующие особые свойства прямоугольника и ромба:

1) *диагонали прямоугольника равны*: $AC = BD$ (рис. 150);

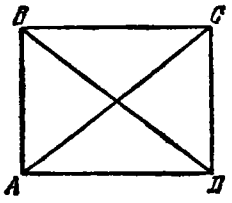


Рис. 150.

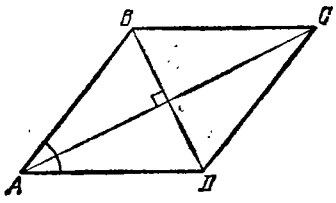


Рис. 151.

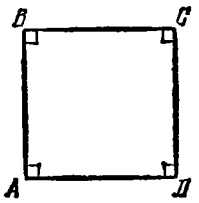


Рис. 152.

2) *если в параллелограмме диагонали равны, то параллелограмм является прямоугольником;*

3) *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам* (рис. 151).

Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны. Квадрат является ромбом, поэтому обладает свойствами прямоугольника и ромба. Основные свойства квадрата:

1) *все углы квадрата прямые* (рис. 152);

2) *диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, в точке пересечения делятся пополам и делят его углы пополам.*

Теорема Фалеса. Свойство средней линии треугольника.

Теорема Фалеса. *Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.*

Доказательство. Пусть l_1 и l_2 — данные прямые. Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то утверждение теоремы сразу следует из свойства параллелограмма: противоположные стороны параллелограмма равны. Поэтому докажем теорему для случая, когда прямые l_1 и l_2 не параллельны.

Рассмотрим на прямой l_1 равные отрезки A_1B_1 и B_1C_1 и через их концы проведем параллельные прямые a, b и c, которые пересекают прямую l_2 соответственно в точках A_2, B_2 и C_2 (рис. 153). Докажем, что $A_2B_2 = B_2C_2$.

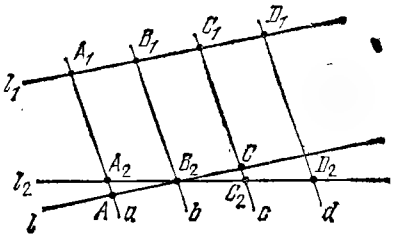


Рис. 153.

Проведем через точку B_2 вспомогательную прямую l, параллельную прямой l_1. Она пересекает прямые a и c в точках A и C. Четырехугольники $A_1AB_2B_1$ и $B_1B_2CC_1$ являются параллелограммами, поэтому $A_1B_1 = AB_2$, $B_1C_1 = B_2C$. Следовательно, $AB_2 = B_2C$, т. е. точка B_2 — середина отрезка AC.

Рассмотрим треугольники AA_2B_2 и CC_2B_2. Эти треугольники равны, так как $AB_2 = B_2C$, $\angle AB_2A_2 = \angle CB_2C_2$, как вертикальные углы, $\angle A_2AB_2 = \angle C_2CB_2$, как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых a и c и секущей l; следовательно, $A_2B_2 = B_2C_2$.

Точно так же доказывается, что $B_2C_2 = C_2D_2$ и т. д. Теорема доказана.

Задача. Разделить данный отрезок AB на n равных частей.

Решение. Проведем из точки A произвольный луч AC, не принадлежащий прямой AB, и на нем от точки A отложим последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 154). Проведем через точки A_n и B прямую. Прямые, параллельные прямой A_nB и проходящие через точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$,

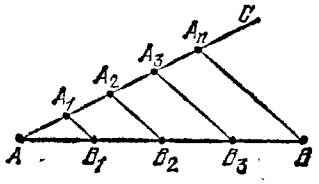


Рис. 154.

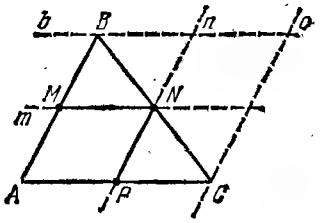


Рис. 155.

пересекают отрезок AB в точках $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, которые и делят отрезок AB на n равных частей. Это следует из теоремы Фалеса.

Определение. *Средней линией* треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Докажем теорему о свойстве средней линии треугольника.

Теорема 4. *Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне, а длина ее равна половине длины этой стороны.*

Доказательство. Пусть ABC—данный треугольник, а MN—средняя линия, соединяющая середины сторон AB и BC (рис. 155). Докажем, что $MN \| AC$ и $|MN| = \frac{1}{2}|AC|$.

Проведем через точки B и M прямые b и m, параллельные прямой AC. Точка M—середина отрезка AB, поэтому, согласно теореме Фалеса, прямая m проходит через середину N отрезка BC, т. е. совпадает с прямой MN. Значит, $MN \| AC$.

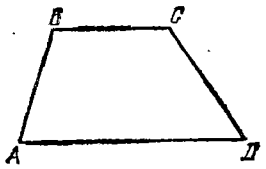


Рис. 156.

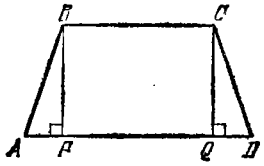


Рис. 157.

Проведем через точки N и C прямые n и c, параллельные прямой AB. Точка N—середина отрезка BC, поэтому прямая n проходит через середину отрезка AC—точку P. Четырехугольник $AMNP$—параллелограмм, так как $AM \| PN$, $MN \| AP$. Поэтому $MN = AP$ или $|MN| = \frac{1}{2}|AC|$. Итак, $MN \| AC$ и $|MN| = \frac{1}{2}|AC|$. Теорема доказана.

Трапеция. Свойство средней линии трапеции. *Трапецией* называется выпуклый четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции (AD и BC) называются ее *основаниями*, непараллельные (AB и CD)—*боковыми* сторонами (рис. 156). Трапеция называется *равнобочной* или *равнобедренной*, если боковые стороны равны (рис. 157). Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной* (рис. 158).

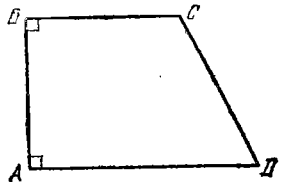


Рис. 158.

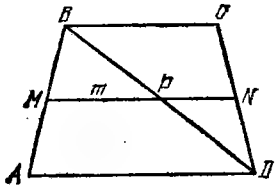


Рис. 159.

В равнобочной трапеции углы при основании равны. Докажем, например, что $\angle A = \angle D$ (см. рис. 157). Из точек B и C проведем перпендикуляры BP и CQ к основанию AD. Так как

$BC \| AD$, то $BP = CQ$. Прямоугольные треугольники APB и DQC равны: у них $BP = CQ$, а $AB = CD$ по условию. Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle D$.

Верно и обратное утверждение: *если углы A и D при основании трапеции равны, то трапеция является равнобочной.*

В любой трапеции сумма величин углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180° (по свойству односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых и секущей).

Определение. *Средней линией* трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Докажем теорему о средней линии трапеции.

Теорема 5. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина ее равна полусумме длин оснований.*

Доказательство. Пусть $ABCD$—данная трапеция, а MN—ее средняя линия (рис. 159). Докажем, что $MN \| AD$ и $|MN| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$.

Проведем через середину M стороны AB прямую m, параллельную основаниям AD и BC. Согласно теореме Фалеса прямая m проходит через середину отрезка CD—точку N, т. е. совпадает с прямой MN. Значит, $MN \| AD$.

Проведем диагональ BD и обозначим точку ее пересечения со средней линией трапеции через P. По теореме Фалеса точка P—середина отрезка BD. Отрезки MP и PN—средние линии треугольников ABD и BDC. По свойству средней линии треугольника

$$|MP| = \frac{1}{2}|AD|, \quad |PN| = \frac{1}{2}|BC|.$$

Следовательно,

$$|MN| = |MP| + |PN| = \frac{1}{2}|AD| + \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|).$$

Итак, $MN \| AD$ и $|MN| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$. Теорема доказана.

Упражнения

Раздел I

1. Доказать, что в равнобедренном треугольнике две медианы равны, две биссектрисы равны, две высоты равны.

2. Доказать, что прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки.

3. Доказать, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

4. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

5. Доказать, что множество точек плоскости, равноудаленных от данной прямой, состоит из двух прямых, параллельных этой прямой.

6. Доказать, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

7. Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. (Указание. Продолжить медиану на расстояние, равное ее длине.)

Доказать обратное утверждение: если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

8. Доказать, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

9. Доказать, что всякий отрезок с концами на основаниях трапеции делится средней линией трапеции пополам.

10. Доказать, что средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.

11. Построить треугольник: а) по стороне и прилежащим к ней углам; б) по двум сторонам и углу между ними; в) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

12. В данном треугольнике построить его медианы, высоты и биссектрисы.

13. Построить треугольник, если даны середины его сторон.

14. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, опущенной на боковую сторону.

15. Построить равносторонний треугольник по его высоте.

16. Через точку, данную внутри угла, провести прямую, которая отсекает от сторон угла равные отрезки.

17. Построить прямоугольник по стороне и сумме его диагоналей.

18. Построить ромб: а) по стороне и диагонали; б) по стороне и углу; в) по двум диагоналям.

19. Построить квадрат: а) по двум вершинам; б) по данной диагонали.

20. Построить трапецию: а) по основаниям и боковым сторонам; б) по основаниям и диагоналям.

Раздел II

21. Каждая из сторон равностороннего треугольника ABC продолжена: AB за вершину B, BC за вершину C, CA за вершину A, и на продолжениях сторон отложены отрезки одинаковой длины, через их концы B_1, C_1, A_1 и соответственно вершины C, A, B проведены прямые B_1C, C_1A и A_1B. Определить вид треугольника, полученного пересечением этих прямых.

22. Доказать, что каждая сторона треугольника меньше его полупериметра.

23. Доказать, что в равнобедренном прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, равна ее половине,

24. Углы треугольника относятся как 1:2:3. Большая сторона равна 8 м. Найти длину меньшей стороны и медианы большей стороны.

25. Доказать, что прямая, соединяющая основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, углы которого равны углам данного треугольника.

26. Построить треугольник по углу α, противолежащему стороне a и высоте h, опущенной на эту сторону.

27. Построить треугольник, если даны два его угла A и B и сумма двух его сторон $a+b$.

28. Построить треугольник, если даны разность сторон $a-b$ и два угла A и B.

29. Построить треугольник, если даны его периметр и два угла A и B.

30. Середины F и E сторон AB и DC параллелограмма $ABCD$ соединены прямыми соответственно с вершинами D и B. Доказать, что эти прямые делят диагональ AC на три равные части.

31. Построить прямоугольник: а) по основанию и диагонали; б) по диагонали и углу между диагоналями.

32. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найти периметр прямоугольника.

33. Построить ромб по диагонали и высоте.

34. Стороны ромба образуют с его диагоналями углы, разность которых равна $\frac{3}{17}d$. Определить углы ромба.

35. Построить квадрат: а) по периметру; б) по диагонали.

36. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Определить сторону квадрата, если известно, что гипотенуза равна 6 см.

Глава XI. ОКРУЖНОСТЬ

§ 1. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности

Пусть R — радиус окружности и d — расстояние от центра окружности до прямой p (т. е. длина перпендикуляра, опущенного из центра на прямую).

Возможны три случая:

а) *если* $R > d$, *то прямая имеет две общие точки с окружностью* (рис. 160, *а*);

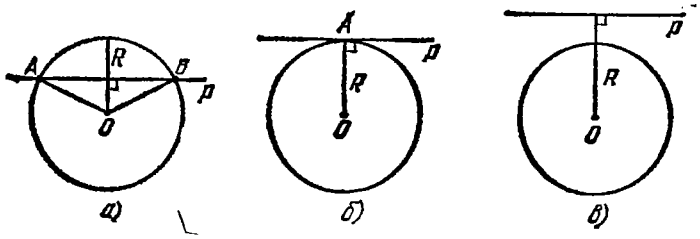


Рис. 160.

б) *если* $R = d$, *то прямая имеет только одну общую точку с окружностью* (рис. 160, *б*);

в) *если* $R < d$, *то прямая не имеет общих точек с окружностью* (рис. 160, *в*).

Доказательство. Примем центр окружности за начало координат, а прямую, перпендикулярную к данной прямой p за

ось Ox (рис. 161). Тогда уравнение окружности имеет вид: $x^2+y^2=R^2$ (§ 5 гл. VII). Точками прямой p являются те и только те точки плоскости, для которых расстояние от оси Oy равно d. Поэтому уравнение прямой p будет $x=d$. Для того чтобы прямая и окружность имели общие точки, надо, чтобы система двух уравнений

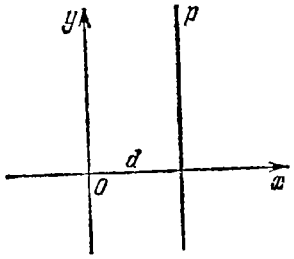


Рис. 161.

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ x=d \end{cases}$$

имела решение. И обратно, всякое решение этой системы дает координаты $(x;\ y)$ общей точки прямой и окружности. Решая систему, получим

$$y=\pm\sqrt{R^2-d^2}.$$

Из этого выражения для y видно, что система имеет два решения, если $R>d$. Система имеет одно решение, если $R=d$. Система не имеет решения, если $R<d$.

Определение. Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к окружности, а общая точка прямой и окружности — *точкой касания*.

На рис. 160, *б* прямая p — касательная к окружности, A — точка касания.

Таким образом, при $R>d$ прямая и окружность пересекаются; при $R=d$ прямая и окружность касаются; при $R<d$ прямая и окружность не пересекаются.

Рассмотрим свойства касательной к окружности.

Теорема 1. *Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.*

Доказательство. Пусть p — касательная к окружности, A — точка касания (см. рис. 160, *б*). Докажем, что отрезок $OA \perp p$. Допустим, что это не так. Тогда OA — наклонная, проведенная из точки O к прямой p. Пусть OH — перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую p. Так как перпендикуляр меньше наклонной, то $OH<OA$, т. е. $OH<R$. Расстояние от центра окружности до прямой p меньше радиуса. Значит, прямая p пересекает окружность. Это противоречит условию. Значит, наше допущение неверно и $OA \perp p$.

Теорема 2 (обратная теореме 1). *Если прямая перпендикулярна к радиусу окружности и проходит через его конец, лежащий на окружности, то она является касательной к этой окружности.*

Предлагаем доказать эту теорему самостоятельно.

Задача 1. Построить касательную к данной окружности, параллельную данной прямой.

Решение. Опускаем на данную прямую a из центра O перпендикуляр OA и через точки B и C, в которых этот перпендикуляр пересекается с окружностью, проводим прямые b и c

параллельно a (рис. 162). Согласно теореме 2 b и c — искомые касательные.

Рассмотрим взаимное расположение двух окружностей.

Определение. Если две окружности имеют одну общую точку, то говорят, что они *касаются*; если же две окружности имеют две общие точки, то говорят, что они *пересекаются*.

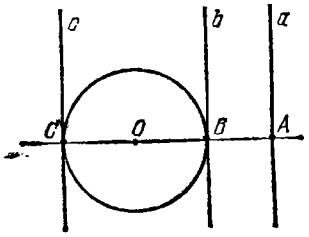


Рис. 162.

Касание двух окружностей называется *внешним*, если окружности расположены одна вне другой (рис. 163, *а*), и *внутренним*, если одна из окружностей лежит внутри другой (рис. 163, *б*).

Пусть R и R_1 — радиусы двух окружностей и d — расстояние между их центрами O и O_1.

Возможны пять случаев:

1) *если* $R+R_1>d>|R-R_1|$, *то окружности пересекаются*;

2) *если* $R+R_1=d$, *то окружности имеют внешнее касание*;

3) *если* $|R-R_1|=d$, *то окружности имеют внутреннее касание*;

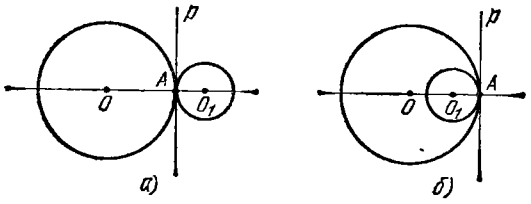


Рис. 163.

4) *если* $R+R_1<d$, *то окружности лежат одна вне другой не касаясь*;

5) *если* $|R-R_1|>d$, *то окружности лежат одна внутри другой, не касаясь*; в частном случае, когда $d=0$, центры обеих окружностей совпадают (такие окружности называются *концентрическими*).

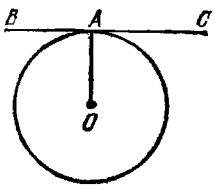


Рис. 164.

Доказательство опускаем. Отметим, что справедливы и обратные утверждения.

Задача 2. Через данную точку провести к данной окружности касательную.

Решение. Рассмотрим два случая:

1) Данная точка A лежит на данной окружности (рис. 164). Тогда через нее проводим радиус и через конец его A строим перпендикуляр BC к этому радиусу (§ 2 гл. X). Согласно теореме 2 BC — искомая касательная.

2) Данная точка A лежит вне данной окружности (рис. 165). Тогда, соединив точку A с центром окружности O, делим отрезок AO пополам в точке O_1 (§ 2 гл. X). Затем с центром в

точке O_1 радиусом OO_1 проводим окружность. Эта окружность пересекается с данной (доказательство предоставим читателю). Через их точки пересечения B и B_1 проводим прямые AB и AB_1. Эти прямые и будут касательными, так как углы OBA и OB_1A, как вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые (§ 2 гл. XI).

Следствие. *Отрезки двух касательных, проведенных к окружности из точки вне ее, равны и образуют равные углы с прямой, соединяющей эту точку с центром.*

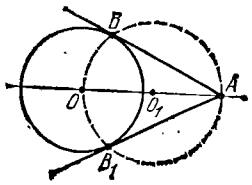


Рис. 165.

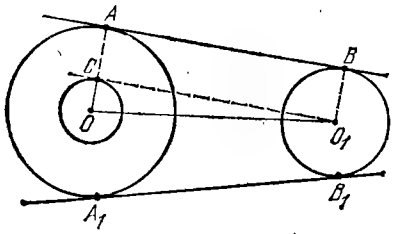


Рис. 166.

Это свойство касательных к окружности следует из равенства прямоугольных треугольников AOB и AOB_1: $AB=AB_1$, $\angle OAB=\angle OAB_1$ (см. рис. 165).

Задача 3. К двум окружностям провести общую касательную (рис. 166).

Решение. Пусть R—радиус окружности с центром O, R_1—радиус окружности с центром O_1, причем $R > R_1$.

1) Анализ. Предположим, что задача решена. Пусть AB—общая касательная, A и B—точки касания. Если мы найдем одну из этих точек, например A, то затем найдем и другую.

Проведем радиусы OA и O_1B. Они перпендикулярны к общей касательной и, следовательно, параллельны. Если из точки O_1 провести $O_1C \parallel BA$, то треугольник OCO_1 будет прямоугольный с прямым углом при вершине C. Если опишем с центром в точке O радиусом OC окружность, то она будет касаться прямой O_1C в точке C. Радиус этой вспомогательной окружности известен: он равен $OA-CA=OA-O_1B$, т. е. равен разности $R-R_1$ радиусов данных окружностей.

2) Построение. Опишем окружность с центром в точке O радиусом, равным $R-R_1$; из точки O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C (способом, указанным в решении предыдущей задачи); через точку касания C проводим радиус OC и продолжаем его до пересечения с данной окружностью в точке A; из точки A проводим AB параллельно CO_1.

3) Доказательство. Из способа построения следует, что AB—искомая касательная.

4) Исследование. Тем же способом можно построить другую общую касательную A_1B_1. Прямые AB и A_1B_1 называются *внешними общими касательными* двух окружностей.

Предоставим читателям провести еще две внутренние касательные.

Решение задачи на построение, как видно из приведенного примера, состоит из четырех частей:

1) Отыскание способа решения задачи путем установления связей между данными задачи и искомыми. Эта часть называется анализом и имеет целью составление плана решения.

2) Выполнение построения.

3) Доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи.

4) Исследование задачи, где выясняется вопрос: при любых ли данных можно решить задачу и сколько решений она имеет.

Если задача простая, то отдельные части, например анализ или исследование опускаются. Так мы поступали при решении простейших задач на построение в § 2 гл. X.

§ 2. Углы в окружности

Пусть A и B—две точки окружности (рис. 167). Проведем через них прямую. Она разбивает плоскость на две полуплоскости. Части окружности, лежащие в этих полуплоскостях, называются *дугами* окружности. Если AB—диаметр, то дуги окружности называются *полуокружностями*. Чтобы различить две дуги окружности с общими концами A и B, на каждой из них отмечают по промежуточной точке и эти дуги обозначают тремя буквами: $\cup ALB$ и $\cup AMB$.

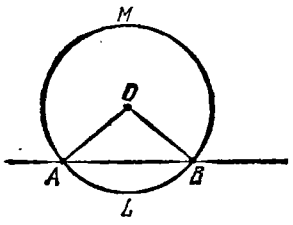


Рис. 167.

Если хорда AB не является диаметром, то $\cup AMB$ лежит в полуплоскости, которая содержит центр окружности. Эта дуга называется дугой большей полуокружности. Дугу ALB будем называть дугой меньшей полуокружности.

Центральным углом, отвечающим данной дуге окружности, будем называть фигуру, которая состоит из лучей, исходящих из центра окружности и пересекающих эту дугу.

Для центральных углов определяем градусную меру по следующему правилу. Если соответствующая дуга AB меньше полуокружности, то за величину центрального угла принимаем обычную меру угла, образованного полупрямыми OA и OB. Если дуга равна полуокружности, т. е. AB—диаметр, то угловую меру полагаем равной 180°. Если дуга больше полуокружности, то за угловую меру принимаем $360°-\alpha$, где α—градусная мера дополнительного угла (меньшего полуокружности).

Введем понятие градусной меры дуги окружности. Будем считать, что градусная мера дуги равна угловой мере центрального угла, которому соответствует эта дуга.

Градусные меры $\cup ALB$ и $\cup AMB$ будем обозначать так: $\overset{\frown}{ALB}$ и $\overset{\frown}{AMB}$. Тогда $\overset{\frown}{ALB} = \widehat{AOB} = \alpha$, $\overset{\frown}{AMB} = 360° - \alpha$. Сумма градусных мер двух дуг с общими концами равна 360°.

Две дуги называются *равными*, если они принадлежат одной и той же окружности или разным окружностям с равными радиусами и их градусные меры равны.

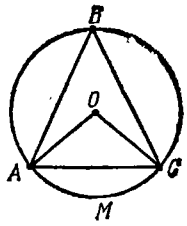


Рис. 168.

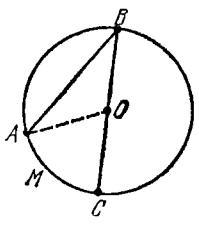


Рис. 169.

Рассмотрим два свойства равенства дуг:

1) *если центральные углы данной окружности равны, то соответствующие им дуги попарно равны;*

2) *если две дуги одной окружности равны, то центральные углы, отвечающие этим дугам, также равны.*

Доказательство предоставим читателям.

Указание. 2) Пусть $\cup ACD$ и $\cup A_1C_1D_1$ — равные дуги окружности. Возможны три случая: $\overset{\frown}{ACD} < 180°$, $\overset{\frown}{ACD} = 180°$, $\overset{\frown}{ACD} > 180°$. Доказательство равенства центральных углов привести для каждого случая в отдельности.

Определение. Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают ее, называется *вписанным* углом.

На рис. 168 угол ABC вписанный. Говорят, что этот угол опирается на дугу AMC (дуга AMC — та из двух дуг с концами A и C, которой не принадлежит вершина B вписанного угла). Центральный угол, отвечающий дуге AMC, называется центральным углом, соответствующим данному вписанному углу ABC.

Теорема 1. *Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.*

Доказательство. Пусть $\angle ABC$ — данный вписанный угол окружности.

Рассмотрим сначала случай, когда одна из сторон вписанного угла является диаметром (рис. 169). В этом случае центральный угол, соответствующий вписанному углу ABC, равен углу AOC. Так как $\angle AOC$ является внешним углом равнобедренного треугольника AOB, то $\angle AOC = \angle OAB + \angle OBA$. Углы OAB и OBA при основании равнобедренного треугольника равны. Поэтому $\angle AOC = 2\angle OBA$, т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$, что и утверждалось.

Пусть теперь ни одна из сторон вписанного угла не является диаметром. Проведем диаметр из вершины B вписанного угла. Будем различать два случая:

1) стороны угла ABC разделяются диаметром BD;
2) стороны угла ABC не разделяются диаметром.

Рассмотрим первый случай. По доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle AOD$, $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle COD$. Если центральный угол, соответствующий углу ABC, меньше полуокружности (рис. 170, *а*), то отсюда заключаем, что $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. Следовательно, вписанный угол ABC равен половине соответствующего центрального угла.

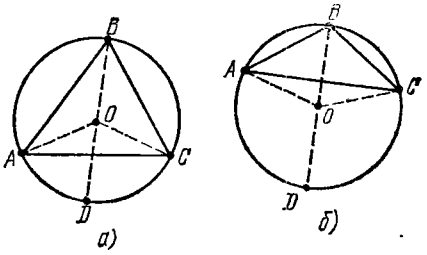


Рис. 170.

Если центральный угол, соответствующий вписанному углу ABC, больше полуокружности (рис. 170, *б*), то $\overset{\frown}{AOD} = 180° - \overset{\frown}{AOB}$, $\overset{\frown}{COD} = 180° - \overset{\frown}{BOC}$. Отсюда заключаем, что $\overset{\frown}{ABC} = \frac{1}{2}(360° - \overset{\frown}{AOC})$, т. е. вписанный угол ABC равен половине соответствующего центрального угла.

Второй случай, когда диаметр BD не разделяет стороны угла ABC, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Для центрального угла AOC, отвечающего дуге AMC, имеем: $\overset{\frown}{AOC} = \overset{\smile}{AMC}$. Поэтому для вписанного угла ABC получаем $\overset{\frown}{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AMC}$, т. е. мера вписанного угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

Следствие 1. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой* (рис. 171).

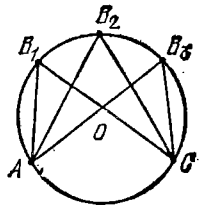


Рис. 171.

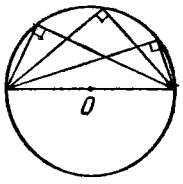


Рис. 172.

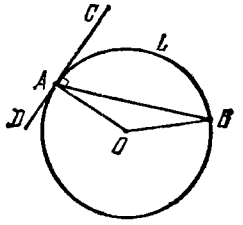


Рис. 173.

Следствие 2. *Вписанный угол, опирающийся на полуокружность,—прямой* (рис. 172).

Пусть AB—хорда окружности (рис. 173). Проведем касательную к окружности в точке A. Точка A разбивает касательную на две полупрямые, полукасательные. Угол между полукасательной и хордой и центральный угол, отвечающий той из дуг $\cup AB$, которая лежит в одной полуплоскости с полукасательной относительно прямой AB, называются соответствующими.

Теорема 2. *Угол между хордой и полукасательной измеряется половиной соответствующего центрального угла.*

Доказательство. Возьмем сначала угол BAC между хордой и полукасательной, соответствующий меньшему центральному углу (см. рис. 173). В этом случае $\widehat{BAC}=90°-\widehat{OAB}$. Так как $2\widehat{OAB}+\widehat{AOB}=180°$, то $\widehat{OAB}=90°-\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ и, следовательно, $\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$, т. е. половине соответствующего центрального угла. Угол BAD между хордой и другой касательной будет смежным и поэтому равен $180°-\frac{1}{2}\widehat{AOB}$. А это как раз половина величины дополнительного центрального угла. Теорема доказана.

§ 3. Свойства хорд и диаметров окружности

Теорема 1. *Диаметр есть наибольшая из хорд.*

Доказательство. Пусть AB—хорда, не проходящая через центр окружности, CD—диаметр (рис. 174). Рассмотрим треугольник AOB. В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон. Поэтому $AB<OA+OB$. Так как OA и OB—радиусы, то $AB<CD$. Значит, диаметр больше всякой хорды, не проходящей через центр. Но так как диаметр есть тоже хорда, то диаметр—наибольшая из хорд.

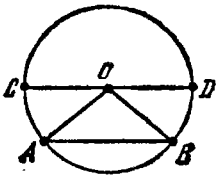


Рис. 174.

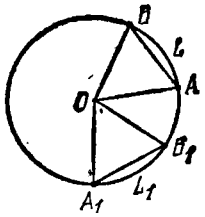


Рис. 175.

Говорят, что хорда стягивает дугу окружности, если она соединяет концы этой дуги.

Теорема 2. *Две равные хорды окружности стягивают попарно равные дуги и обратно, если две дуги окружности равны, то стягивающие их хорды также равны.*

Доказательство. Докажем только первое утверждение. Пусть в окружности с центром O хорды AB и A_1B_1 равны (рис. 175). Если эти хорды являются диаметрами, то наше утверждение очевидно. Поэтому рассмотрим случай, когда хорды AB и A_1B_1 не являются диаметрами. Треугольники AOB и A_1OB_1 равны, так как $OA=OA_1$, $OB=OB_1$, $AB=A_1B_1$. Поэтому центральные углы AOB и A_1OB_1, отвечающие дугам ALB и $A_1L_1B_1$, равны. Отсюда следует, что соответствующие им дуги равны: $\cup ALB=\cup A_1L_1B_1$.

Теорема 3. *Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду пополам. Обратно, диаметр, проведенный через середину хорды, не проходящей через центр окружности, перпендикулярен этой хорде.*

Доказательство. Пусть AB — данная хорда и M — ее середина (рис. 176). Проведем диаметр через точку M. Треугольники OAM и OBM равны: у них стороны OA и OB равны, как радиусы, сторона OM общая, $AM = MB$, так как M — середина отрезка AB. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle OMA = \angle OMB$. Эти равные углы смежные и, значит, прямые. Поэтому диаметр CD, проведенный через точку M, перпендикулярен хорде AB и делит ее пополам. Другого перпендикулярного хорде AB диаметра не существует, так как через точку O можно провести только одну прямую, перпендикулярную прямой AB. Первое утверждение теоремы доказано.

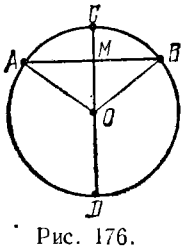


Рис. 176.

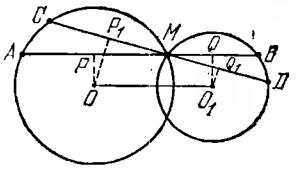


Рис. 177.

Пусть диаметр CD проходит через середину M хорды AB (см. рис. 176). Докажем, что $CD \perp AB$.

Треугольник AOB равнобедренный ($OA = OB$) и отрезок OM является его медианой. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная из вершины, является также высотой треугольника. Поэтому $OM \perp AB$ или $CD \perp AB$. Теорема доказана.

Задача. Через точку M пересечения двух окружностей с центрами O и O_1 проведены два отрезка: AB, параллельный OO_1 и CD, не параллельный OO_1 (рис. 177). Доказать, что $AB > CD$.

Решение. Из центров O и O_1 опустим на AB перпендикуляры OP и O_1Q. В прямоугольнике $OPQO_1$ имеем $PQ = OO_1$. Так как P и Q — середины хорд AM и MB согласно теореме 3, то $AB = 2PQ$, т. е. $AB = 2OO_1$. Выполним аналогичное построение для CD и получим прямоугольную трапецию $OP_1Q_1O_1$, в которой $P_1Q_1 < OO_1$ и, значит, $CD < 2OO_1$. Поэтому $AB > CD$.

§ 4. Вписанные и описанные многоугольники

Определение. Многоугольник, все вершины которого принадлежат окружности, называется *вписанным* в эту окружность, а окружность — *описанной* около этого многоугольника.

Определение. Многоугольник, все стороны которого касаются окружности, называется *описанным* около этой окружности, а окружность — *вписанной* в этот многоугольник.

Докажем для треугольника существование описанной и вписанной окружностей.

Теорема 1. *Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Центром этой окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 178). Проведем через середины сторон AB и AC треугольника прямые, перпендикулярные этим сторонам (серединные перпендикуляры). Эти прямые пересекаются в некоторой точке O. Действительно, в противном случае они были бы параллельны. Но тогда прямые AB и AC, как перпендикулярные к параллельным, были бы тоже параллельны, а они пересекаются (в точке A).

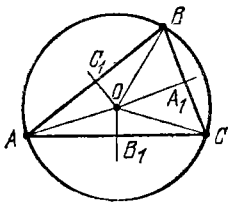


Рис. 178.

Из равенства прямоугольных треугольников AOB_1 и COB_1 следует, что $OA=OC$. Из равенства прямоугольных треугольников AOC_1 и BOC_1 следует, что $OA=OB$. Поэтому окружность с центром в точке O и радиусом OA проходит через все три вершины треугольника ABC и, следовательно, является описанной окружностью.

Точка O равноудалена от концов отрезка BC, и значит, она лежит также на серединном перпендикуляре стороны BC треугольника.

Таким образом, серединные перпендикуляры трех сторон треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка является центром окружности, описанной около треугольника. Теорема доказана.

Согласно теореме через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.

Замечание. Будем говорить, что точка лежит внутри треугольника ABC, если она лежит по одну сторону с точкой A относительно прямой BC, по одну сторону с точкой B относительно прямой AC и по одну сторону с точкой C относительно прямой AB. Предоставим читателю убедиться, что центр описанной окружности лежит внутри треугольника только тогда, когда треугольник остроугольный; в тупоугольном треугольнике он лежит вне его, а в прямоугольном — на середине гипотенузы.

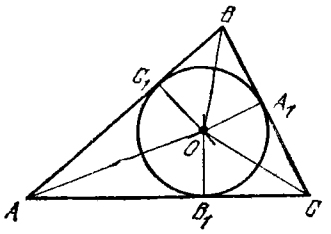


Рис. 179.

Теорема 2. *В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центром этой окружности является точка пересечения биссектрис треугольника.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 179). Проведем две биссектрисы треугольника при вершинах A и B. Они пересекаются в некоторой точке O внутри треугольника. (То, что биссектрисы пересекаются, доказывается дословно так же, как то, что пересекаются медианы, см. далее § 5; то, что точка пересечения биссектрис всегда лежит внутри треугольника, примем без доказательства.)

Опустим из точки O перпендикуляры OA_1, OB_1 и OC_1 на прямые BC, AC и AB. Прямоугольные треугольники AOB_1 и AOC_1 равны. У них гипотенуза AO общая, а углы OAB_1 и OAC_1 равны, так как AO — биссектриса. Следовательно, $OB_1 = OC_1$. Из равенства прямоугольных треугольников BOC_1 и BOA_1 следует, что $OC_1 = OA_1$. Значит, окружность с центром O и радиусом OA_1 проходит через точки A_1, B_1 и C_1.

Эта окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1, так как стороны в этих точках перпендикулярны к радиусам в их концах и, следовательно, являются касательными к окружности (§ 1 гл. XI). Существование окружности, вписанной в треугольник ABC, доказано.

Точка O равноудалена от сторон угла ACB, и значит, CO — биссектриса.

Таким образом, три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и эта точка является центром окружности, вписанной в треугольник. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 следует, что в равностороннем (или правильном) треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают; эта точка называется *центром* равностороннего треугольника.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании описанной и вписанной окружностей для случая выпуклого четырехугольника.

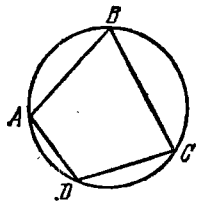


Рис. 180.

Теорема 3. 1) *Если около выпуклого четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна двум прямым углам.*

2) *Если в выпуклом четырехугольнике сумма его противоположных углов равна двум прямым углам, то около четырехугольника можно описать окружность.*

Доказательство. 1) Пусть $ABCD$ — данный выпуклый четырехугольник, около которого можно описать окружность (рис. 180). Требуется доказать, что

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ, \qquad \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ.$$

Так как сумма величин всех четырех углов всякого выпуклого четырехугольника равна 360°, то достаточно доказать только одно из требуемых равенств.

Докажем, например, что $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$.

По теореме о величине вписанного угла

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BCD}, \quad \hat{C} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{DAB}.$$

Следовательно, $\hat{A} + \hat{C} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BCD} + \overset{\smile}{DAB}) = 180^\circ$, так как сумма градусных мер двух дуг BCD и DAB с общими концами равна 360°.

2) Пусть $ABCD$—выпуклый четырехугольник, у которого $\widehat{A}+\widehat{C}=180°$, и, следовательно, $\widehat{B}+\widehat{D}=180°$ (рис. 181). Требуется доказать, что около такого четырехугольника можно описать окружность.

Проведем через точки A, B, C окружность (это всегда возможно). Допустимо лишь одно из трех положений: точка D лежит внутри этой окружности; вне окружности; на окружности.

Предположим, что точка D лежит внутри окружности. Тогда $\widehat{B}+\widehat{D}=180°$ (по условию теоремы), $\widehat{B}+\widehat{E}=180°$ (по доказанному). Отсюда $\widehat{D}=\widehat{E}$, что невозможно, так как внешний угол D треугольника EDC больше его внутреннего угла E. Следовательно, точка D не может находиться внутри построенной окружности.

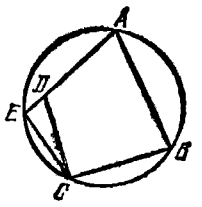


Рис. 181.

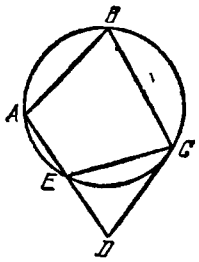


Рис. 182.

Аналогично, доказывается, что вершина D не может лежать и вне этой окружности (рис. 182).

Следовательно, точка D лежит на окружности, проведенной через вершины A, B, C данного четырехугольника, т. е. около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Теорема доказана.

Следствие 1. *Из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность.*

Следствие 2. *Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная (равнобедренная), и обратно, если около трапеции описана окружность, то эта трапеция является равнобочной.*

Теорема 4. 1) *Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны.*

2) *Если суммы длин противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.*

Доказательство. 1) Пусть $ABCD$—данный четырехугольник, в который можно вписать окружность (рис. 183). Требуется доказать, что

$$AB+CD=BC+AD.$$

Стороны четырехугольника касаются окружности в точках M, N, P и Q. По свойству касательных, проведенных из одной точки (§ 1 гл. XI), имеем: $AM=AQ$, $BM=BN$, $CN=CP$, $DP=DQ$.

Следовательно,

$$AM+MB+CP+PQ=AQ+QD+BN+NC,$$

т. е.

$$AB+CD=AD+BC.$$

Второе утверждение теоремы примем без доказательства.

Следствие 1. *Из всех параллелограммов только в ромб можно вписать окружность; ее центром является точка пересечения диагоналей ромба, так как диагонали ромба делят его углы пополам.*

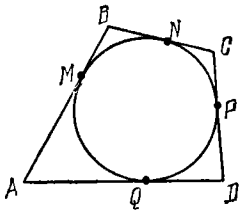


Рис. 183.

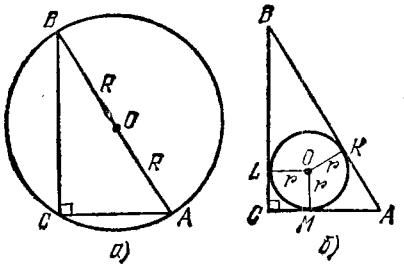


Рис. 184.

Следствие 2. *В трапецию можно вписать окружность в том и только в том случае, если сумма боковых сторон трапеции равна сумме ее оснований.*

Из теорем 3 и 4 следует, что в квадрате центры вписанной и описанной окружностей совпадают; эта точка называется *центром* квадрата. Центр квадрата—точка пересечения его диагоналей.

Задача. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

Решение. Диаметр $2R$ окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, равен гипотенузе AB (рис. 184, *а*). Диаметр $2r$ вписанной окружности равен $MC+CL$ (так как $MOLC$—квадрат) (рис. 184, *б*). По свойству касательной к окружности имеем

$$AM=AK, \quad BL=BK.$$

Поэтому

$$AC+BC=(AM+MC)+(BL+LC)=$$
$$=(AK+BK)+(MC+CL)=2R+2r.$$

§ 5. Четыре замечательные точки в треугольнике

В § 4 было доказано, что:

1) серединные перпендикуляры трех сторон треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка является центром описанной окружности;

2) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка является центром вписанной окружности.

Следующие две теоремы дают еще две замечательные точки треугольника:

3) точку пересечения трех медиан и

4) точку пересечения трех высот.

Теорема 1. *Три медианы треугольника пересекаются в одной точке; эта точка делит каждую медиану в отношении* 2:1, *считая от вершины.*

Доказательство. Пусть ABC—данный треугольник (рис. 185). Проведем его медианы AA_1 и BB_1. Докажем сначала, что медианы AA_1 и BB_1 пересекаются. Точки C и B_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AA_1. Точки C и B лежат в разных полуплоскостях. Следовательно, точки B и B_1 лежат в разных полуплоскостях. Поэтому медиана BB_1 пересекается с прямой AA_1. Точно так же доказываем, что медиана AA_1 пересекается с прямой BB_1. Так как прямые AA_1 и BB_1 пересекаются только в одной точке, то эта точка принадлежит медиане AA_1 и медиане BB_1, т. е. медианы пересекаются. Пусть O—точка их пересечения.

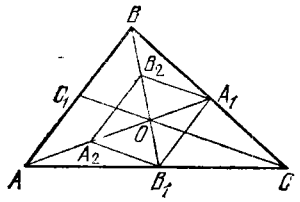


Рис. 185.

Проведем среднюю линию A_1B_1 треугольника ABC и среднюю линию A_2B_2 треугольника AOB. Обе они параллельны стороне AB и равны половине этой стороны. Отсюда следует, что четырехугольник $A_1B_1A_2B_2$—параллелограмм. По свойству параллелограмма $B_1O=OB_2$, а $OB_2=BB_2$ по построению. Следовательно, медиана AA_1 пересекает медиану BB_1 в точке O, которая делит медиану BB_1 в отношении 2:1, считая от вершины B. Точно так же доказывается, что точка O делит медиану AA_1 в отношении 2:1, считая от вершины A. Медиана CC_1, проведенная из точки C, пересекает каждую из медиан AA_1 и BB_1 в точке, которая делит эти медианы в том же отношении. Значит, медиана CC_1 проходит через точку O. Теорема доказана.

Из физики известно, что точка пересечения медиан треугольника есть его центр тяжести; он всегда лежит внутри треугольника.

Теорема 2. *Прямые, содержащие три высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*

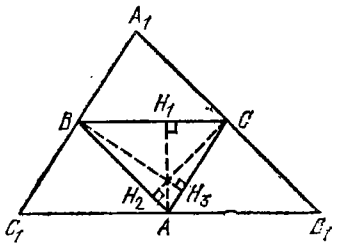


Рис. 186.

Доказательство. Пусть ABC—данный треугольник, AH_1, BH_3, CH_2—высоты (рис. 186). Через каждую вершину треугольника ABC проведем прямую, параллельную противоположной стороне. Получим вспомогательный треугольник $A_1B_1C_1$. Так как четырехугольники $ACBC_1$ и $ABCB_1$—параллелограммы, то $AC_1=BC=AB_1$. По построению $BC\parallel B_1C_1$, поэтому $AH_1\perp B_1C_1$. Следовательно, прямая AH_1 является серединным перпендикуляром отрезка B_1C_1. Точно так же доказывается, что прямая BH_3—серединный перпендикуляр отрезка A_1C_1, а CH_2—серединный

перпендикуляр отрезка A_1B_1. Так как серединные перпендикуляры трех сторон треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в одной точке, то прямые AH_1, BH_2 и CH_3 пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Замечание. Точка, в которой пересекаются высоты треугольника (точнее, прямые, содержащие высоты), называется его *ортоцентром*.

Задача. Построить треугольник по трем медианам.

Решение. Построим треугольник, зная отрезки, равные его медианам.

1) Анализ. Предположим, что задача решена. Пусть ABC — треугольник, медианы которого равны данным отрезкам (рис. 187). Медианы пересекаются в точке O. На продолжении медианы BB_1 отложим отрезок B_1B_2, равный OB_1, и соединим точку B_2 с вершинами A и C. В четырехугольнике $AOCB_2$ диагонали AC и OB_2 в точке пересечения B_1 делятся пополам: $AB_1=B_1C$ по условию, $OB_1=B_1B_2$ по построению. Следовательно, $AOCB_2$ — параллелограмм. Поэтому $B_2C=AO=\frac{2}{3}AA_1$. Кроме того, $OB_2=\frac{2}{3}BB_2$, $CO=\frac{2}{3}CC_1$. Таким образом, в ходе анализа мы получили треугольник COB_2 с известными сторонами.

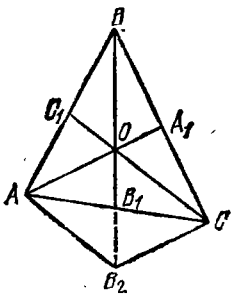


Рис. 187.

2) Построение. Выберем произвольную точку C и построим треугольник COB_2, стороны которого равны 2/3 каждой из медиан искомого треугольника. Пусть B_1 — середина стороны B_2O. На продолжении отрезка CB_1 отложим отрезок B_1A, равный отрезку CB_1, а на продолжении отрезка B_2O — отрезок OB, равный отрезку B_2O. Соединив точку B с точками A и C, получим искомый треугольник ABC.

3) Доказательство. Соединим точку A с точками O и B_2. Четырехугольник $AOCB_2$ — параллелограмм. Следовательно, $AO=B_2C$. По построению BB_1 — медиана $\triangle ABC$, а O — точка пересечения медиан треугольника. Переход от треугольника COB_2 приводит к треугольнику ABC с данными медианами.

Исследование опускаем. Очевидно, что не любые три отрезка могут быть медианами одного и того же треугольника.

Упражнения

Раздел I

1. Построить касательную к данной окружности, перпендикулярную данной прямой.

2. Доказать, что дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

3. Что представляет собой множество вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки?

4. Провести окружность, которая касается сторон данного угла, причем одной из них в данной точке.

5. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

6. Построить равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанной окружности.

7. Около данной окружности описать равнобедренный прямоугольный треугольник.

8. Построить ромб по данной стороне и радиусу вписанной окружности.

9. Вписать квадрат в данную окружность.

Раздел II

10. В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды, равные 36 мм и 48 мм; расстояние между ними — 42 мм. Определить радиус окружности.

11. Из данной точки на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу окружности. Определить угол между диаметром и хордой.

12. Из данной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, из которых первая удалена от центра на 30 см, а вторая на 10 см. Найти их длины.

13. Концы диаметра удалены от касательной на 18 см и 12 см. Определить длину диаметра.

14. Окружность разделена на три части, которые относятся между собой, как 5:6:7, и через точки деления проведены касательные. Определить углы полученного треугольника.

15. Периметр описанной трапеции равен 6 см. Найти длину ее средней линии.

16. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 30 см, а средняя линия равна 9 см. Найти длину каждой из боковых сторон трапеции.

17. Три стороны описанного четырехугольника, взятые в последовательном порядке, относятся как 3:4:5, а периметр четырехугольника равен 48 см. Определить стороны этого четырехугольника.

18. Вершины вписанного четырехугольника делят последовательно окружность на дуги, пропорциональные числам 2; 5; 7; 4. Определить углы этого четырехугольника.

Глава XII. ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

§ 1. Пропорциональные отрезки

Каждый отрезок имеет определенную длину. Длина отрезка зависит от выбора единицы измерения и выражается положительным рациональным или иррациональным числом.

Аксиома измерения отрезков. *При переходе от одной единицы измерения к другой длины всех отрезков умножаются на одно и то же число.*

Отсюда следует, что отношение длин двух отрезков не зависит от выбора единицы измерения.

В дальнейшем для краткости будем говорить об отношении двух отрезков, понимая под этим число, равное отношению длин этих отрезков.

Отрезки AB и CD называются *пропорциональными* отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если пропорциональны их длины:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}.$$

Запись $\frac{AB}{A_1B_1}$ означает здесь и далее отношение $\frac{|AB|}{|A_1B_1|}$, где $|AB|$—длина отрезка AB, $|A_1B_1|$—длина отрезка A_1B_1.

Теорема. *Если стороны угла с вершиной в точке O пересечены параллельными прямыми AB и MN* (рис. 188), *то отрезки OA и OB пропорциональны отрезкам OM и ON, т. е.*

$$\frac{OA}{OM}=\frac{OB}{ON}. \qquad (1)$$

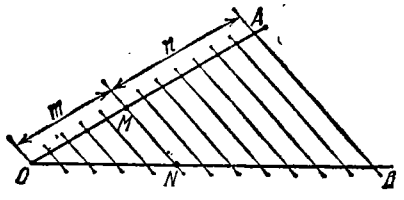


Рис. 188.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда имеется такой отрезок EF, что $OM=mEF$, $MA=nEF$, где m и n—целые числа. Говорят, что отрезок EF в каждом из отрезков OM и MA укладывается целое число раз без остатка.

Разделим отрезок OM на m равных частей, а отрезок MA на n равных частей. Каждый из полученных отрезков будет равен EF. Примем отрезок EF за единицу измерения. Тогда $OM=m$, $MA=n$. Допустим для определенности, что точка M лежит между точками O и A. Тогда $OA=OM+MA=m+n$.

Проведем через точки деления отрезков OM и MA прямые, параллельные прямой AB. Согласно теореме Фалеса эти прямые разделят отрезок ON на m равных отрезков, а отрезок NB на n равных отрезков. Если t—длина каждого из этих отрезков, то $ON=mt$, $NB=nt$, поэтому $OB=ON+NB=(m+n)t$.

Таким образом,

$$\frac{OA}{OM}=\frac{m+n}{m},\quad \frac{OB}{ON}=\frac{(m+n)t}{mt}=\frac{m+n}{m}.$$

Отсюда следует, что $\frac{OA}{OM}=\frac{OB}{ON}$, т. е. выполняется равенство (1).

Не для любых отрезков OM и MA существует такой отрезок EF, который в каждом из отрезков OM и MA укладывается целое число без остатка. Но и в этом случае можно доказать, что равенство (1) выполняется. Теорема доказана.

Следствие. *Если стороны угла с вершиной в точке O пересечены параллельными прямыми AB и MN* (см. рис. 188), *то*

отрезки MA и NB пропорциональны отрезкам OA и OB, т. е.

$$\frac{MA}{OA}=\frac{NB}{OB}. \qquad (2)$$

Доказательство. Допустим для определенности, что точка M лежит между точками O и A. Тогда $OA=OM+MA$; $OB=ON+NB$, или

$$OM=OA-MA;\ ON=OB-NB. \qquad (3)$$

Из равенства (1) следует, что $\frac{OM}{OA}=\frac{ON}{OB}$. Подставив сюда значения OM и ON из (3), получаем

$$\frac{OA-MA}{OA}=\frac{OB-NB}{OB} \text{ или } 1-\frac{MA}{OA}=1-\frac{NB}{OB},$$

и равенство (2) доказано.

Отрезки AB, CD, MN называются *пропорциональными* отрезкам A_1B_1, C_1D_1, M_1N_1, если

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{MN}{M_1N_1}.$$

Задача. К трем отрезкам A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 построить четвертый пропорциональный, т. е. построить отрезок PQ, удовлетворяющий условию:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{A_3B_3}{PQ}.$$

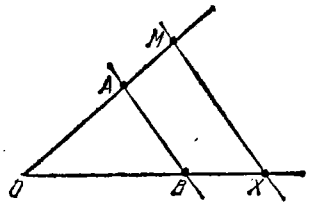


Рис. 189.

Решение. На стороне произвольного угла с вершиной O отложим последовательно отрезки OA и AM, равные соответственно отрезкам A_1B_1 и A_2B_2, а на другой стороне — отрезок OB, равный отрезку A_3B_3 (рис. 189). Затем проводим прямую AB и строим прямую MX, проходящую через точку M и параллельную прямой AB. Полученный отрезок BX будет искомым, так как, согласно следствию из теоремы о пропорциональных отрезках,

$$\frac{OA}{AM}=\frac{OB}{BX} \text{ или } \frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{A_3B_3}{PQ}.$$

§ 2. Подобные треугольники

Определение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *подобными*, если

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1$$

и

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}.$$

Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то пишут $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$. В подобных треугольниках углы одного

треугольника соответственно равны углам другого треугольника, а стороны одного пропорциональны соответственным сторонам другого (т. е. сторонам, которые лежат против соответственно равных углов).

Рассмотрим простейшие свойства подобных треугольников, которые вытекают из определения подобия.

1. *Если два треугольника равны, то они подобны. В частности, каждый треугольник подобен самому себе.*

2. *Если один треугольник подобен другому, то и второй треугольник подобен первому.*

3. *Если первый треугольник подобен второму, а второй третьему, то первый треугольник подобен третьему треугольнику.*

Докажем сначала лемму (вспомогательную теорему) о подобных треугольниках, а затем с ее помощью докажем признаки подобия треугольников.

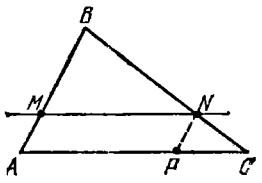


Рис. 190.

Лемма. *Прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, а MN — прямая, параллельная стороне AC (рис. 190).

Докажем, что $\triangle MBN \sim \triangle ABC$. Углы $\triangle MBN$ соответственно равны углам $\triangle ABC$: $\angle B$ общий, $\angle M = \angle A$ и $\angle N = \angle C$, как соответственные углы при пересечении параллельных прямых MN и AC секущими.

Докажем, что соответственные стороны $\triangle MBN$ и $\triangle ABC$ пропорциональны.

Пропорция

$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$$

следует из теоремы о пропорциональных отрезках (§ 1).

Докажем, что $\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$.

Проведем через точку N прямую NP, параллельную отрезку AB. Применяя следствие из теоремы о пропорциональных отрезках к углу ACB и параллельным прямым NP и AB, получаем

$$\frac{PA}{CA} = \frac{NB}{CB}.$$

Так как $AMNP$ — параллелограмм, то $PA = NM$, поэтому

$$\frac{NM}{CA} = \frac{NB}{CB}$$

или

$$\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}.$$

Значит,

$$\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}=\frac{MN}{AC},$$

т. е. соответственные стороны треугольников MBN и ABC пропорциональны. Лемма доказана.

Теорема 1 (первый признак подобия треугольников). *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$—треугольники, у которых $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, и следовательно, $\angle C=\angle C_1$. Докажем, что $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 191). Отложим на луче BA от точки B отрезок BA_2, равный отрезку A_1B_1 и через точку A_2 проведем прямую, параллельную прямой AC. Эта прямая пересечет луч BC в некоторой точке C_2. Треугольники $A_1B_1C_1$ и A_2BC_2 равны: $A_1B_1=A_2B$ по построению, $\angle B=\angle B_1$ по условию и $\angle A_1=\angle A_2$, так как $\angle A_1=\angle A$ по условию и $\angle A=\angle A_2$, как соответственные углы. По лемме о подобных треугольниках имеем: $\triangle A_2BC_2\sim\triangle ABC$, и значит, $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

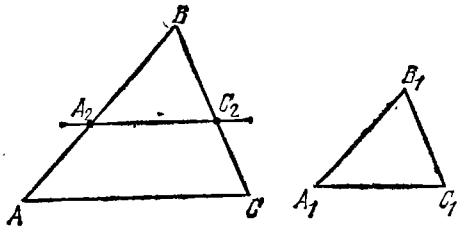


Рис. 191.

Теорема 2 (второй признак подобия треугольников). *Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$—треугольники (рис. 192), у которых

$$\angle B=\angle B_1,\quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

Докажем, что $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$.

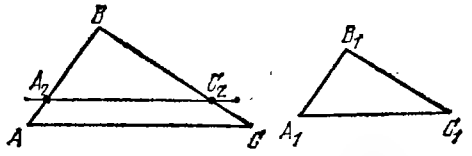


Рис. 192.

Отложим на луче BA от точки B отрезок BA_2, равный отрезку B_1A_1, и через точку A_2 проведем прямую, параллельную прямой AC, которая пересечет луч BC в точке C_2.

Докажем, что $\triangle A_1B_1C_1=\triangle A_2BC_2$. По лемме о подобных треугольниках имеем $\triangle A_2BC_2\sim\triangle ABC$. Поэтому

$$\frac{BA}{BA_2}=\frac{BC}{BC_2}. \tag{4}$$

Сравним эту пропорцию с данной пропорцией

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}. \tag{5}$$

Так как по построению $A_2B = A_1B_1$, то из пропорций (4) и (5) следует, что $B_1C_1 = BC_2$. Итак, $A_1B_1 = A_2B$, $B_1C_1 = BC_2$, $\angle B_1 = \angle B$, поэтому $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2BC_2$.

Так как $\triangle ABC \sim \triangle A_2BC_2$ и $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Теорема 3 (третий признак подобия треугольников). *Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — треугольники, стороны которых пропорциональны (см. рис. 192):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \tag{6}$$

Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Сделав построение такое же, как и прежде, покажем, что $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и A_2BC_2 следует:

$$\frac{AB}{A_2B} = \frac{BC}{BC_2} = \frac{AC}{A_2C_2}. \tag{7}$$

По построению $A_2B = A_1B_1$. Поэтому из отношений (6) и (7) вытекает, что $BC_2 = B_1C_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$, и, значит, $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\triangle ABC \sim \triangle A_2BC_2$ и $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Рассмотрим признаки подобия прямоугольных треугольников. Из доказанных признаков подобия треугольников следует:

если в двух прямоугольных треугольниках:

1) *острый угол одного равен острому углу другого,* или

2) *катеты одного пропорциональны катетам другого, то такие треугольники подобны.*

Теорема. *Если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники подобны.*

Предлагаем доказать эту теорему самостоятельно.

Теорема 4. *В подобных треугольниках отношение двух соответственных сторон равно отношению двух соответственных:* 1) *высот;* 2) *биссектрис;* 3) *медиан.*

Доказательство предоставим читателю.

Задача 1. Длины оснований трапеции $ABCD$ равны a и b. Найти длину отрезка с концами на боковых сторонах трапеции, если этот отрезок параллелен основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей.

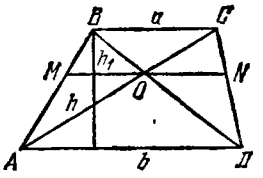


Рис. 193.

Решение. Пусть MN — отрезок, длину которого требуется найти; $|BC| = a$, $|AD| = b$ (рис. 193).

Обозначим $|MO| = x$, $|ON| = y$, h_1 и h — длины высот, проведенных из вершины B в треугольниках MBO и ABD соответственно.

Так как $\triangle MBO \sim \triangle ABD$ и $\triangle OCN \sim \triangle ACD$, то

$$\frac{x}{b}=\frac{h_1}{h},\ \frac{y}{b}=\frac{h_1}{h},$$

следовательно, $x=y$. Из подобия треугольников AMO и ABC следует:

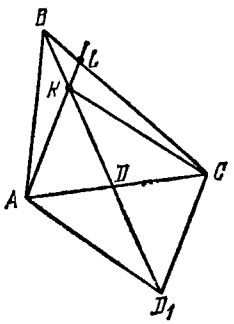


Рис. 194.

$$\frac{x}{a}=\frac{h-h_1}{h},\ \text{или}\ \frac{x}{a}=1-\frac{h_1}{h}.$$

Поэтому

$$\frac{x}{a}=1-\frac{x}{b}.$$

Решая это уравнение, получим

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

Отсюда $|MN|=2x=\frac{2ab}{a+b}$.

Задача 2. В $\triangle ABC$ точка K делит медиану BD в отношении 1 : 2, считая от вершины (рис. 194). Прямая, проведенная через точки A и K, пересекает сторону BC в точке L. В каком отношении точка L делит сторону BC?

Решение. На продолжении медианы BD отложим отрезок DD_1, равный отрезку KD. Соединим точку D_1 с вершинами A и C, а точку K — с точкой C. Четырехугольник $AKCD_1$—параллелограмм, следовательно, $AK \parallel D_1C$. Поэтому $\triangle KBL \sim \triangle D_1BC$; $\frac{BL}{BC}=\frac{BK}{BD_1}$. По условию $\frac{BK}{KD}=\frac{1}{2}$, значит, $\frac{BK}{BD_1}=\frac{1}{5}$. Отсюда $\frac{BL}{LC}=\frac{1}{4}$.

§ 3. Теорема Пифагора

Определение. Отрезок x называется *средним пропорциональным* (или *средним геометрическим*) между отрезками a и b, если для их длин выполняется равенство $a : x = x : b$, т. е. $x=\sqrt{ab}$.

Теорема. *Если в прямоугольном треугольнике проведена высота из прямого угла, то:*

высота есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые она делит гипотенузу;

катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 195). Проведем из вершины прямого угла C высоту CD и обозначим ее длину через h. Требуется доказать, что $h^2=c_1c_2$, $b^2=cc_1$, $a^2=cc_2$.

Имеем три пары подобных треугольников:

$\triangle ADC \sim \triangle ACB$ (угол A общий, $\angle D=\angle C$);

$\triangle ACB \sim \triangle CDB$ (угол B общий, $\angle C=\angle D$);

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$ (по свойству подобия треугольников).

Так как $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, то $c_1 : h = h : c_2$, т. е. $h^2=c_1c_2$.

Так как $\triangle ADC \sim \triangle ACB$, то $c_1 : b = b : c$, т. е. $b^2 = cc_1$.
Так как $\triangle ACB \sim \triangle CDB$, то $c : a = a : c_2$, т. е. $a^2 = cc_2$.
Теорема доказана.

Теорема Пифагора. *В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.*

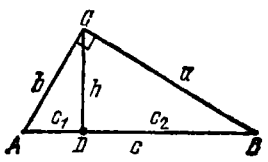


Рис. 195.

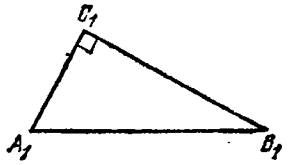


Рис. 196.

Доказательство. В прямоугольном треугольнике ABC проведем из вершины прямого угла C высоту CD (см. рис. 195). Требуется доказать, что $c^2 = a^2 + b^2$.

По предыдущей теореме получаем $b^2 = cc_1$ и $a^2 = cc_2$. Сложив почленно эти равенства, получим

$$b^2 + a^2 = cc_1 + cc_2 = c(c_1 + c_2).$$

или $b^2 + a^2 = c^2$, так как $c_1 + c_2 = c$.

Итак, $c^2 = a^2 + b^2$, что и требовалось доказать.

Теорема (обратная теореме Пифагора). *Если в треугольнике ABC квадрат длины стороны AB равен сумме квадратов длин двух других сторон, то треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине C.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, у которого $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Рассмотрим вспомогательный прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 196), катеты которого A_1C_1 и B_1C_1 соответственно равны сторонам AC и BC данного треугольника. По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$. Отсюда следует, что $A_1B_1 = AB$. Поэтому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ и, значит, $\triangle ABC$ — прямоугольный с прямым углом при вершине C. Теорема доказана.

Согласно этой теореме треугольник со сторонами, длины которых равны 3, 4 и 5, является прямоугольным. Действительно, $5^2 = 3^2 + 4^2$. Прямоугольными треугольниками являются также треугольники со сторонами 5, 12, 13, или 8, 15, 17, или 7, 24, 25 и др., так как в каждом из этих треугольников квадрат длины большей из сторон равен сумме квадратов длин двух других сторон. А такие треугольники по теореме, обратной теореме Пифагора, являются прямоугольными.

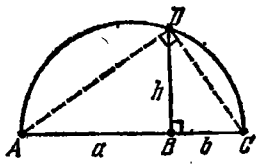


Рис. 197.

Задача 1. Построить отрезок, средний пропорциональный между отрезками a и b.

Решение. На произвольной прямой (рис. 197) отложим отрезки $AB = a$ и $BC = b$; на отрезке AC, как на диаметре, опишем

полуокружность; из точки B проводим до пересечения с окружностью перпендикуляр BD. Этот перпендикуляр и есть искомый отрезок, средний пропорциональный между отрезками AB и BC. Действительно, соединив точку D с точками A и C, получим прямоугольный треугольник ADC ($\angle D$ — прямой, как вписанный угол, опирающийся на диаметр). В этом треугольнике отрезок BD является высотой, проведенной из вершины прямого угла, и, значит, $BD^2 = AB \cdot BC$ или $AB : BD = BD : BC$.

Задача 2. Построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{7}$.

Решение. Возьмем $a = 7$ и $b = 1$ (см. рис. 197). Так как $h^2 = ab$, то $h = \sqrt{ab} = \sqrt{7}$.

Задача 3. Доказать, что в прямоугольном треугольнике (см. рис. 195)

$$h = \frac{ab}{c}, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Решение. По теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике

$$h^2 = c_1 c_2, \quad b^2 = cc_1, \quad a^2 = cc_2.$$

Поэтому

$$c_1 = \frac{b^2}{c}, \quad c_2 = \frac{a^2}{c}.$$

Следовательно,

$$h^2 = \frac{b^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{cc_1}{cc_2},$$

и, значит,

$$h^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ или } h = \frac{ab}{c}, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

§ 4. Свойство биссектрисы треугольника. Пропорциональность отрезков хорд и секущих

Теорема 1. *Биссектриса треугольника при любой вершине делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, BD — биссектриса при вершине B (рис. 198). Требуется доказать, что

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} \text{ или } \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

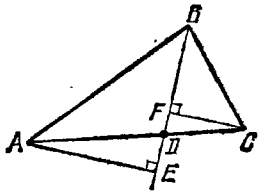


Рис. 198.

Опустим перпендикуляры AE и CF на прямую BD. Треугольники AED и CFD подобны: углы E и F — прямые, а углы при вершине D равны, как вертикальные.

Треугольники ABE и CBF тоже подобны: углы E и F — прямые, а углы при вершине B равны, так как BD — биссектриса.

Из подобия треугольников AED и CFD следует пропорция:

$$\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{DC}.$$

Из подобия треугольников ABE и CBF следует пропорция:

$$\frac{AE}{CF}=\frac{AB}{BC}.$$

Сравнивая обе пропорции, получим

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Произведения длин отрезков пересекающихся хорд равны; если хорды AB и CD пересекаются в точке M, то* $AM\cdot BM=CM\cdot DM$ (рис. 199).

Доказательство. Рассмотрим треугольники AMD и BMC и докажем, что они подобны. Углы A и C равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD. Углы AMD и BMC равны, как вертикальные. Из подобия треугольников AMD и BMC следует, что

$$\frac{AM}{CM}=\frac{DM}{BM},$$

или $AM\cdot BM=CM\cdot DM$. Теорема доказана.

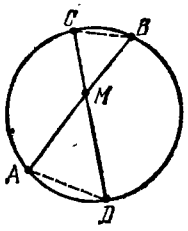


Рис. 199.

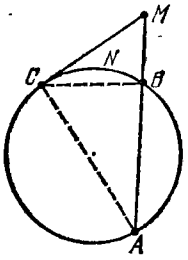


Рис. 200.

Теорема 3. *Произведение длин отрезков секущей равно квадрату длины отрезка касательной; если через точку M проведена секущая окружности и касательная, причем A и B — точки пересечения окружности с секущей, а C — точка касания с касательной, то* $AM\cdot BM=CM^2$ (рис. 200).

Доказательство. Рассмотрим треугольники MAC и MCB и докажем, что они подобны. У них угол M общий. Угол CAB, как вписанный, равен половине центрального угла, отвечающего дуге BNC. Угол BCM, как угол между хордой и полукасательной, измеряется половиной того же центрального угла (§ 2 гл. XI). Значит, углы CAB и BCM равны. Из подобия треугольников MAC и MCB получим, что

$$\frac{AM}{CM}=\frac{CM}{BM}$$

или $AM\cdot BM=CM^2$. Теорема доказана.

Следствие. *Произведения длин отрезков секущих, проведенных из одной точки вне окружности, равны.*

Задача 1. Биссектриса, проведенная из вершины прямого угла треугольника, делит гипотенузу в отношении $m:n$. Доказать, что высота, проведенная из той же вершины, делит гипотенузу в отношении $m^2:n^2$.

Решение. Пусть CD — высота, CE — биссектриса в прямоугольном $\triangle ABC$ (рис. 201). По условию $AE:BE=m:n$. Согласно свойству биссектрисы треугольника имеем, что $AC:BC=m:n$. Из свойств высоты, проведенной из вершины прямого угла,

следует, что $AD : BD = AC^2 : BC^2$ (см. § 3, задача 3). Поэтому $AD : BD = m^2 : n^2$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Точка внутри окружности отстоит от ее центра на расстоянии d. Хорда, проходящая через эту точку, делится в ней на отрезки длины a и b. Найти радиус окружности.

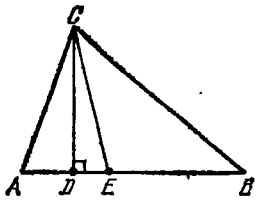


Рис. 201.

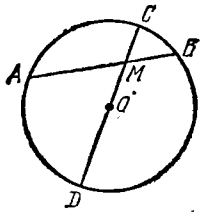


Рис. 202.

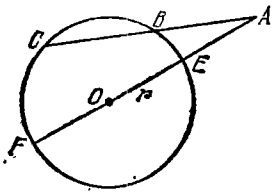


Рис. 203.

Решение. Дано: $|OM| = d$, $|AM| = a$, $|BM| = b$ (рис. 202). Пусть r — искомый радиус. Проведем через точку M диаметр CD. Тогда $|CM| = r - d$, $|DM| = r + d$. По свойству пересекающихся хорд получаем $(r-d)(r+d) = ab$, откуда $r = \sqrt{ab + d^2}$.

Задача 3. Расстояние от точки A до центра окружности радиусом r равно $2r$. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружность в точках B и C. Найти AC, если точка B делит отрезок AC пополам.

Решение. Пусть $AC = x$, тогда $AB = \frac{x}{2}$. По условию $AO = 2r$, и значит, $AE = r$ (рис. 203). По свойству секущих, проведенных из одной точки A, имеем

$$AB \cdot AC = AE \cdot AF.$$

Поэтому $\frac{x}{2} \cdot x = r \cdot 3r$, откуда $x = r\sqrt{6}$.

§ 5. Подобные многоугольники

Рассмотрим два выпуклых многоугольника с одинаковым числом сторон, а следовательно, и вершин.

Определение. Два многоугольника называются *подобными*, если углы одного многоугольника соответственно равны углам другого многоугольника, а стороны, заключающие равные углы, пропорциональны.

Например, два квадрата всегда подобны, а два ромба подобны, если они имеют по равному острому или тупому углу.

В § 2 было доказано, что два треугольника подобны, если стороны одного из них пропорциональны сторонам другого. В случае многоугольников с числом сторон, большим трех, пропорциональности их соответственных сторон уже недостаточно для подобия этих многоугольников. Например, квадрат не подобен ромбу, один из углов которого острый, хотя их стороны пропорциональны.

Недостаточно для подобия многоугольников и равенства их соответственных углов. Например, квадрат не подобен прямоугольнику, не все стороны которого равны.

Отношение длин соответственных сторон двух подобных многоугольников называется *коэффициентом подобия* этих многоугольников.

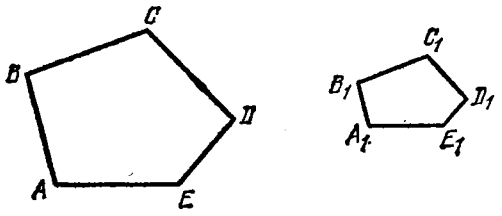


Рис. 204.

Пусть многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны (рис. 204). Тогда пишут $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$. Из подобия следует, что

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}=k,$$

где k — коэффициент подобия. Отсюда

$$AB=kA_1B_1,\ BC=kB_1C_1,\ CD=kC_1D_1,\ DE=kD_1E_1,\ EA=kE_1A_1. \quad (8)$$

Теорема. *Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия этих многоугольников.*

Доказательство. Пусть $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — данные подобные многоугольники (см. рис. 204). Сложив почленно равенства (8), получим

$$AB+BC+\ldots+EA=k(A_1B_1+B_1C_1+\ldots+E_1A_1), \quad (9)$$

где k — коэффициент подобия. Равенство (9) означает, что $P=kP_1$, где P и P_1 — периметры данных многоугольников.

Итак, $P:P_1=k$. Теорема доказана.

Пусть $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$. Проведем из соответствующих вершин A и A_1 диагонали (рис. 205). Тогда $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$,

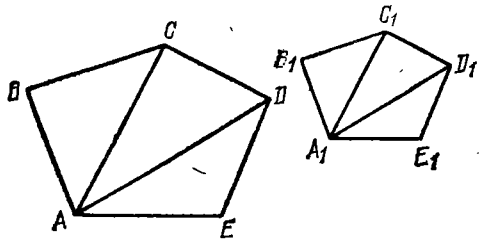


Рис. 205.

так как, согласно подобию многоугольников AB и BC пропорциональны A_1B_1 и B_1C_1, а $\angle B=\angle B_1$. Из подобия этих треугольников следует, что диагонали AC и A_1C_1 многоугольников пропорциональны их соответственным сторонам, а угол ACB равен углу $A_1C_1B_1$, и, значит, угол ACD равен углу $A_1C_1D_1$. Поэтому $\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1$. Аналогично доказывается,

что

$$\triangle ADE \sim \triangle A_1D_1E_1.$$

Таким образом, проведя диагонали из двух соответствующих вершин подобных многоугольников, можно разложить эти многоугольники на подобные треугольники.

Задача. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на боковых сторонах треугольника, а две другие — на основании треугольника.

Решение. В данном $\triangle ABC$ возьмем на стороне AB произвольную точку M и проведем $MN \perp AC$ (рис. 206). На отрезке MN построим квадрат $MNPQ$. Прямая AQ пересекает сторону BC в

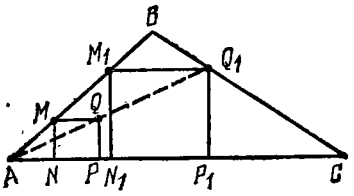


Рис. 206.

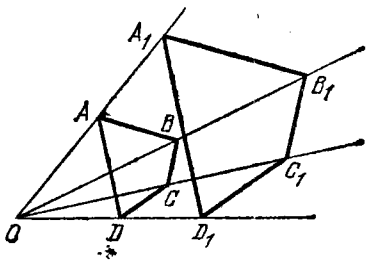


Рис. 207.

некоторой точке Q_1. Проводя из этой точки прямые, параллельные сторонам квадрата $MNPQ$, получаем искомый квадрат $M_1N_1P_1Q_1$.

Действительно, $\triangle AM_1Q_1 \sim \triangle AMQ$, поэтому

$$\frac{M_1Q_1}{MQ} = \frac{AQ_1}{AQ};$$

$\triangle AP_1Q_1 \sim \triangle APQ$, поэтому

$$\frac{P_1Q_1}{PQ} = \frac{AQ_1}{AQ};$$

следовательно,

$$\frac{M_1Q_1}{MQ} = \frac{P_1Q_1}{PQ}.$$

Задача была решена методом подобия: выполнено подобное преобразование квадрата $MNPQ$ в квадрат $M_1N_1P_1Q_1$; точка A — центр подобия, а коэффициент подобия

$$k = \frac{M_1Q_1}{MQ}$$

выбран так, чтобы вершина нового квадрата Q_1, соответствующая вершине Q, оказалась на стороне BC.

На рис. 207 выполнено подобное преобразование четырехугольника $ABCD$ с коэффициентом подобия k. Центр подобия O выбран произвольно; любая точка X переходит в точку X_1 того же луча OX так, что $|OX_1| = k|OX|$.

Упражнения

Раздел I

1. Через точку A_1 медианы AM треугольника ABC проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC, которые пересекают сторону BC в точках B_1 и C_1. Доказать, что A_1M — медиана треугольника $A_1B_1C_1$.

2. Доказать, что прямая, соединяющая середины параллельных сторон трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей.

3. Доказать, что из двух хорд в окружности больше та, которая ближе к центру.

4. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найти длину биссектрисы прямого угла.

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов равен 10 см. Найти проекцию другого катета на гипотенузу.

6. В равнобочной трапеции боковая сторона равна 41 см, высота 40 см, а средняя линия 45 см. Определить основания.

7. В равнобедренном треугольнике основание равно 48 см, а боковая сторона 30 см. Найти радиусы описанной и вписанной окружностей и расстояние между их центрами.

8. Отрезок AD является биссектрисой $\triangle ABC$. Найти CD, если $AB=30$, $BD=20$, $AD=16$ и $\angle ADC=\angle C$.

9. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке D. Доказать, что

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}.$$

10. Внутри круга, радиус которого равен 13 см, дана точка M, отстоящая от центра круга на 5 см. Через точку M проведена хорда $AB=25$ см. Найти длину отрезков, на которые хорда AB делится точкой M.

11. В данный треугольник вписать ромб с данным острым углом так, чтобы две его вершины лежали на боковых сторонах треугольника, а две другие — на основании треугольника.

Раздел II

12. В трапеции $ABCD$ (где $BC\parallel AD$) диагональ BD образует со стороной угол ABD, равный углу BCD. Определить длину AB и AD, если $BC=10$ см, $CD=15$ см и $BD=20$ см.

13. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продолжены до взаимного пересечения в точке M. Определить CM, если $AB=1$ м, $CD=1{,}5$ м и $BM=0{,}8$ м.

14. Высота равнобедренного треугольника равна 40 см, основание — 60 см. Найти боковые стороны и радиусы вписанного и описанного кругов.

15. Диагонали ромба равны 48 см и 14 см. Найти его сторону и радиус вписанного круга.

16. Стороны одного треугольника равны 6,3 м, 8,4 м и 10,5 м. Определить стороны треугольника, подобного первому, зная, что его периметр больше периметра данного на 15,6 м.

17. Секущая AB проведена через центр и равна 32 см, а касательная AC равна 24 см. Определить отрезок BC.

Глава XIII. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИГУР

§ 1. Примеры преобразований фигур

Если каждую точку данной фигуры сместить каким-нибудь образом, то мы получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена преобразованием из данной. Рассмотрим примеры.

Симметрия относительно точки.

Определение. Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки* O, если O — середина отрезка AA_1. Точка O называется *центром* симметрии точек A и A_1. Точка O симметрична самой себе.

Пусть F — данная фигура и O — некоторая точка плоскости (рис. 208). Возьмем произвольную точку M фигуры F. Отложим на продолжении отрезка OM за точку O отрезок OM_1, равный отрезку OM. Построив все точки, симметричные точкам фигуры F относительно точки O, получим фигуру F_1. Преобразование фигуры F в фигуру F_1 есть симметрия относительно точки O.

Определение. Точка O называется *центром симметрии фигуры*, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре.

Если точка O является центром симметрии фигуры F, то говорят, что фигура F симметрична относительно точки O; при этом фигура F называется *центрально-симметричной*.

Симметрия относительно центра центрально-симметричной фигуры переводит эту фигуру в себя.

Фигура может иметь один или несколько центров симметрии. Например, окружность симметрична относительно своего центра. Других центров симметрии окружность не имеет. Параллелограмм также является центрально-симметричной фигурой; центр симметрии параллелограмма — точка пересечения диагоналей.

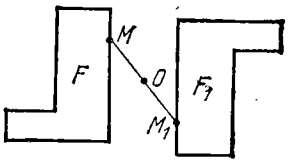


Рис. 208.

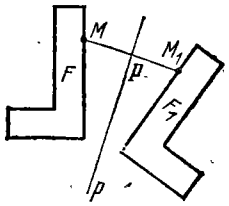


Рис. 209.

Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров симметрии. Простейшей из таких фигур является прямая: любая точка прямой есть ее центр симметрии. Существуют фигуры, которые не имеют ни одного центра симметрии. К таким фигурам относится треугольник.

Симметрия относительно прямой.

Определение. Точки A и A_1 называются *симметричными относительно некоторой прямой* p, если эта прямая перпендикулярна отрезку AA_1 и проходит через его середину. Прямая p называется *осью симметрии* точек A и A_1. Каждая точка оси симметрии симметрична самой себе.

Пусть F — данная фигура и p — некоторая прямая (рис. 209). Возьмем произвольную точку M фигуры F. Опустим из точки M перпендикуляр MP и на продолжении перпендикуляра за точку P отложим отрезок PM_1, равный MP. Построив все точки, симметричные точкам фигуры F относительно прямой p, получим фигуру F_1. Преобразование фигуры F в фигуру F_1 есть симметрия относительно прямой p.

Определение. Прямая p называется *осью симметрии фигуры*, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой p также принадлежит этой фигуре.

Если прямая p является осью симметрии фигуры F, то говорят, что фигура F симметрична относительно прямой p.

Симметрия относительно оси симметрии фигуры переводит эту фигуру в себя.

Фигура может иметь одну или несколько осей симметрии. Например, неразвернутый угол имеет только одну ось симметрии — прямую, содержащую биссектрису угла. Осями симметрии отрезка являются сам отрезок и его серединный перпендикуляр. Равнобедренный треугольник (но неравносторонний) имеет только одну ось симметрии — прямую, которая содержит высоту, проведенную к основанию треугольника. Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии. Квадрат имеет четыре оси симметрии: прямые, на которых лежат его диагонали, а также прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей квадрата параллельно его сторонам.

Существуют фигуры, которые имеют бесконечно много осей симметрии. Так, любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии. Существуют фигуры, которые не имеют оси симметрии. К таким фигурам относится разносторонний треугольник.

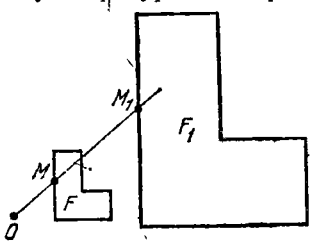


Рис. 210.

Гомоте́тия.

Определение. *Гомотетией с центром* O *и коэффициентом* $k > 0$ называется такое преобразование, при котором произвольная точка M любого луча, исходящего из точки O, переходит в точку M_1 того же луча, причем $|OM_1| = k|OM|$.

Пусть F — данная фигура, O — некоторая точка, k — заданное положительное число (рис. 210). Возьмем произвольную точку M фигуры F. Проведем луч OM и отложим на нем отрезок OM_1, равный $k \cdot |OM|$. Получим точку M_1 новой фигуры F_1. Преобра-

зование фигуры F в фигуру F_1 есть гомотетия с центром O и коэффициентом k. Фигуры F и F_1 называются *гомотетичными*.

Центральная симметрия, осевая симметрия и гомотетия — примеры преобразований фигур.

Задача. Даны прямая p и две точки A и B в одной полуплоскости с границей p (рис. 211). На прямой p построить точку M так, чтобы сумма длин отрезков AM и MB была наименьшей.

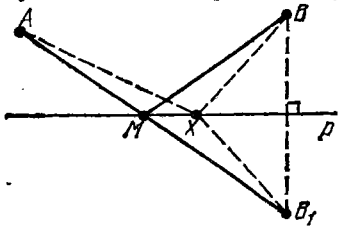


Рис. 211.

Решение. На прямой p требуется построить точку M так, чтобы неравенство

$$AM+MB<AX+XB$$

выполнялось для любой точки X прямой p, отличной от точки M.

Построим точку B_1, симметричную точке B относительно прямой p. Отрезок AB_1 пересечет прямую p в искомой точке M.

Действительно, $MB=MB_1$, $XB=XB_1$. Поэтому $AM+MB=AM+MB_1=AB_1$, $AX+XB=AX+XB_1$. В $\triangle AXB_1$ имеем $AX+XB_1>AB_1$.

§ 2. Движение. Равенство фигур

Определение. Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется *движением*, если оно сохраняет расстояния между точками, т. е. переводит любые две точки M и N фигуры F в точки M_1 и N_1 фигуры F_1 так, что $|MN|=|M_1N_1|$.

Теорема 1. *Преобразования симметрии относительно точки или относительно прямой являются движениями.*

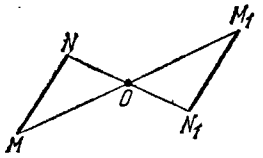


Рис. 212.

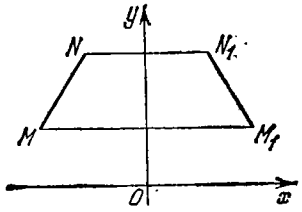


Рис. 213.

Доказательство. Рассмотрим сначала преобразование симметрии относительно точки (рис. 212). Пусть M и N — две произвольные точки фигуры F. Преобразование симметрии относительно точки O переводит их в точки M_1 и N_1. Треугольники MON и M_1ON_1 равны: углы при вершине O равны, как вертикальные, а $OM=OM_1$, $ON=ON_1$ по определению симметрии относительно точки O. Из равенства треугольников следует ра-

венство сторон $MN=M_1N_1$. Значит, симметрия относительно точки O есть движение.

Рассмотрим преобразование симметрии относительно прямой. Примем эту прямую за ось Oy системы координат (рис. 213). Пусть произвольная точка $P(x;\ y)$ фигуры F переходит в точку $P_1(x';\ y')$ фигуры F_1. Из определения симметрии относительно прямой следует, что у точек P и P_1 равные ординаты: $y'=y$, а абсциссы отличаются только знаком: $x'=-x$.

Возьмем две произвольные точки $M(x_1;\ y_1)$ и $N(x_2;\ y_2)$. Они перейдут в точки $M_1(-x_1;\ y_1)$ и $N_1(-x_2;\ y_2)$. Из алгебры известно (§ 3 гл. IV), что

$$|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$
$$|M_1N_1|=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

и, следовательно, $|MN|=|M_1N_1|$. Значит, преобразование симметрии относительно прямой есть движение. Теорема доказана полностью.

Теорема 2. *Если при движении три точки A, B, C, лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1, то эти точки также лежат на прямой. Если точка B лежит между A и C, то точка B_1 лежит между A_1 и C_1.*

Доказательство. Если точки A_1, B_1, C_1 не лежат на прямой, то они являются вершинами треугольника. Поэтому $|A_1C_1|<|A_1B_1|+|B_1C_1|$. По определению движения отсюда следует, что $|AC|<|AB|+|BC|$. Однако по свойству измерения отрезков $|AC|=|AB|+|BC|$. Мы пришли к противоречию. Первое утверждение теоремы доказано.

Покажем теперь, что точка B_1 лежит между A_1 и C_1.

Допустим, что A_1 лежит между B_1 и C_1. Тогда $|A_1B_1|+|A_1C_1|=|B_1C_1|$, и, следовательно, $|AB|+|AC|=|BC|$, что противоречит равенству $|AB|+|BC|=|AC|$. Значит, точка A_1 не может лежать между B_1 и C_1. Так же доказывается, что точка C_1 не может лежать между A_1 и B_1. Поэтому точка B_1 лежит между A_1 и C_1. Теорема доказана полностью.

Свойства движений.

1) *При движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.* Это следует из теоремы 2.

2) *При движении сохраняются углы между полупрямыми.*

Действительно, пусть AB и AC — две полупрямые, исходящие из общей точки A и не лежащие на одной прямой. При движении эти полупрямые перейдут в некоторые полупрямые A_1B_1 и A_1C_1. Так как движение сохраняет расстояния, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны как треугольники, имеющие по три равные стороны. Из равенства треугольников следует равенство углов BAC и $B_1A_1C_1$.

3) *Два движения, выполненные последовательно, дают снова движение.*

Пусть фигура F переводится движением в фигуру F_1, а фигура F_1 переводится движением в фигуру F_2. Преобразование фигуры F в фигуру F_2, полученное в результате двух движений, выполненных последовательно, сохраняет расстояние между точками и, следовательно, является движением.

4) *Преобразование, обратное движению, является также движением.*

Это означает следующее. Пусть преобразование фигуры F в фигуру F_1 переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F_1. Пусть произвольная точка M фигуры F при этом преобразовании переходит в точку M_1 фигуры F_1. Преобразование фигуры F_1 в фигуру F, при котором точка M_1 переводится в точку M, называется *преобразованием, обратным данному*. Движение сохраняет расстояние между точками, поэтому переводит различные точки в различные. Значит, преобразование, обратное движению, также является движением.

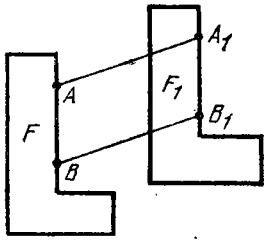


Рис. 214.

Рассмотрим еще два частных вида движений: параллельный перенос и поворот.

Определение. *Параллельным переносом* называется такое движение, при котором точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Это значит, что если точки A и B фигуры F переходят в точки A_1 и B_1 фигуры F_1, то прямые AA_1 и BB_1 параллельны или совпадают, а отрезки AA_1 и BB_1 равны (рис. 214). Движение, при котором все точки остаются неподвижными, также считаются параллельным переносом.

Параллельный перенос определяется заданием точки A_1, в которую переводится точка A данной фигуры.

Теорема 3. *Для любых точек A и A_1 существует и притом единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A_1.*

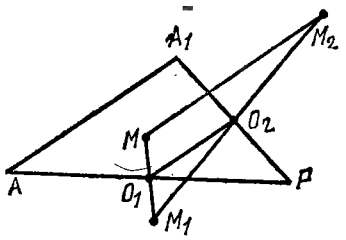


Рис. 215.

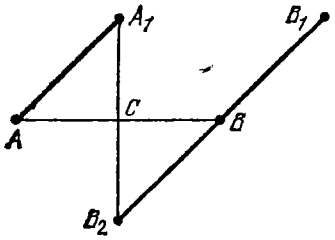


Рис. 216.

Доказательство. Отметим точку P, не лежащую на прямой AA_1, и обозначим через O_1 и O_2 середины отрезков AP и A_1P (рис. 215). Пусть M — произвольная точка плоскости. Построим симметричную ей точку M_1 относительно точки O_1 и затем

точку M_2, симметричную точке M_1 относительно точки O_2. Преобразование плоскости, при котором точка M переводится в точку M_2, есть движение, так как симметрия относительно точки сохраняет расстояние.

Отрезок O_1O_2—средняя линия треугольника M_1MM_2. Поэтому прямые MM_2 и O_1O_2 параллельны, а отрезок MM_2 равен удвоенному отрезку O_1O_2. Таким образом, при построенном движении точки смещаются по прямым, параллельным прямой O_1O_2 на расстояние $2|O_1O_2|$, т. е. движение есть параллельный перенос. При этом параллельном переносе точка A переходит в точку A_1.

Докажем единственность параллельного переноса. Возьмем произвольную точку B, не лежащую на прямой AA_1 (рис. 216). При параллельном переносе точка B сместится на расстояние, равное $|AA_1|$, вдоль прямой, параллельной AA_1, и перейдет либо в точку B_1, расположенную в одной полуплоскости с точкой A_1 относительно прямой AB, либо в точку B_2, расположенную в другой полуплоскости относительно этой прямой.

Допустим, что точка B перейдет в точку B_2. Пусть C—точка пересечения прямой AB с отрезком A_1B_2. Так как прямая AB переходит в прямую A_1B_2, то точка C должна сместиться по прямой, параллельной AA_1, на отрезок, равный AA_1, и попасть при этом на прямую A_1B_2. Но это невозможно, так как точка C уже лежит на прямой A_1B_2. Следовательно, при рассматриваемом параллельном переносе точка B переходит в точку B_1. Однозначность в построении точки B_1, соответствующей точке B, и означает единственность параллельного переноса. Теорема доказана.

Свойства параллельного переноса.

1) *Два параллельных переноса, выполненные последовательно, дают снова параллельный перенос.*

2) *Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос.*

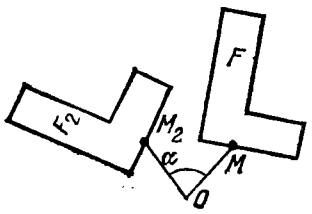


Рис. 217.

Определение. *Поворотом около точки O на угол α* называется такое движение, при котором точка O остается неподвижной, а каждый луч, исходящий из точки O, поворачивается на угол α (рис. 217).

Если провести через точку O две произвольные прямые a и b и подвергнуть данную фигуру F преобразованию симметрии относительно прямой a, то получим фигуру F_1. Подвергнем ее преобразованию симметрии относительно прямой b. Тогда получим некоторую фигуру F_2. Оказывается, фигура F_2 получается из фигуры F поворотом около точки O на некоторый угол α, зависящий от угла между прямыми a и b. И обратно, всякий поворот фигуры F относительно точки O можно получить указанным способом. Доказательства этой теоремы не приводим.

Центральная симметрия есть поворот на 180°. Движение, при котором каждый луч, исходящий из точки O, остается неподвижным, является центральной симметрией.

вижным, также считается поворотом около точки O (поворотом на нулевой угол).

Определение. Фигуры F и F_1 называются *равными*, если они движением переводятся одна в другую.

В гл. IX были рассмотрены понятия равенства отрезков, а также углов: отрезки называются равными, если они имеют равные длины; углы называются равными, если они имеют одинаковую величину (или градусную меру). В гл. X было введено понятие равенства треугольников.

Можно доказать, что понятия равенства отрезков, углов и треугольников, введенные в гл. IX и X, полностью согласуются с новым понятием равенства фигур. Действительно, имеет место следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 4. *Равные отрезки, углы и треугольники совмещаются движением.*

Свойства равенства фигур.

1) *Каждая фигура равна самой себе.*

2) *Если фигура F равна фигуре F_1, то фигура F_1 равна фигуре F.*

3) *Если фигура F равна фигуре F_1, а фигура F_1 равна фигуре F_2, то фигура F равна фигуре F_2.*

§ 3. Преобразование подобия

Определение. Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз.

Это значит, что если произвольные точки M и N фигуры F при этом преобразовании переходят в точки M_1 и N_1 фигуры F_1, то $|M_1N_1| = k|MN|$. Число k называется *коэффициентом подобия*. Так же, как и для движения, доказывается, что при преобразовании подобия три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A_1, B_1, C_1, также лежащие на одной прямой. Причем, если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

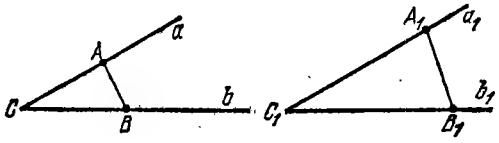


Рис. 218.

Свойства преобразования подобия.

1) *Преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.*

2) *Преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.*

Действительно, пусть угол с вершиной C переводится преобразованием подобия в угол с вершиной C_1 (рис. 218). Возьмем на стороне a угла C произвольную точку A, а на его стороне

b — произвольную точку B. Преобразование подобия переводит их в точки A_1 и B_1 на сторонах a_1 и b_1 угла C_1. Имеем

$$|C_1A_1|=k|CA|,\quad |C_1B_1|=k|CB|,\quad |A_1B_1|=k|AB|,$$

где k — коэффициент подобия. Треугольники ACB и $A_1C_1B_1$ подобны, как треугольники с тремя пропорциональными сторонами. Из подобия треугольников следует, что $\angle C=\angle C_1$.

Определение. Две фигуры называются *подобными*, если они совмещаются преобразованием подобия. Из свойств преобразования подобия следует, что у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.

В гл. XII было рассмотрено подобие многоугольников.

Теорема. *Гомотетия есть преобразование подобия.*

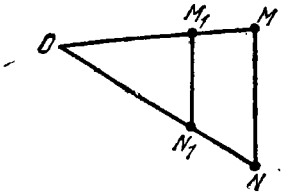


Рис. 219.

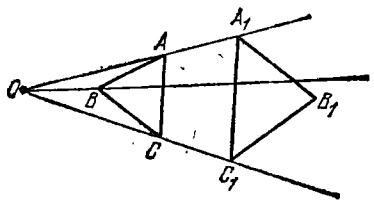


Рис. 220.

Доказательство. Пусть точки M и N переходят при гомотетии относительно точки O в точки M_1 и N_1 (рис. 219). Треугольники MON и M_1ON_1 подобны: угол O общий, а

$$\frac{M_1O}{MO}=\frac{N_1O}{NO}=k$$

(k — коэффициент гомотетии).

Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{M_1N_1}{MN}=k.$$

Теорема доказана.

На рис. 220 изображены подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Но они не гомотетичны, так как прямые AA_1, BB_1, CC_1 не проходят через одну точку.

Упражнения

Раздел I

1. Дан отрезок AB и точка O, не лежащая на прямой AB. Построить фигуру, симметричную отрезку AB относительно точки O.

2. Сколько центров симметрии у фигуры, состоящей из двух параллельных прямых? Где они расположены?

3. Доказать, что если две прямые симметричны относительно некоторой точки и одна из них не проходит через эту точку, то прямые параллельны.

4. Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Построить отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.

5. Даны прямая a и точка O, не лежащая на этой прямой. Построить фигуру, симметричную прямой a относительно точки O.

6. Доказать, что если треугольник имеет ось симметрии, то он равнобедренный и осью симметрии является серединный перпендикуляр основания.

7. Доказать, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то она имеет также и центр симметрии.

8. Даны две прямые a и a_1. Доказать, что прямую a_1 можно получить движением из прямой a.

9. Даны точка O и две окружности. Построить отрезок так, чтобы точка O была его серединой, а концы отрезка принадлежали данным окружностям.

10. Даны острый угол ABC и точка P внутри этого угла. Построить на сторонах угла точки M и N так, чтобы $\triangle MNP$ имел наименьший периметр.

11. Доказать, что два круга одинакового радиуса равны.

12. Доказать, что фигура, подобная окружности, есть окружность.

13. Дан угол и внутри него точка A. Построить окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A.

Раздел II

14. Доказать, что перпендикуляры, востановленные в середине двух симметричных отрезков, симметричны между собой.

15. Доказать, что две прямые, проходящие через точки A и A_1, симметричные относительно оси MN и образующие равные углы с отрезком AA_1, симметричны относительно оси MN.

16. Даны точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Доказать, что оси симметрии трех пар этих точек (A и B, B и C, C и A) пересекаются в одной точке.

17. Построить треугольник, симметричный данному относительно его центра тяжести.

18. Построить ромб по данному отношению его диагоналей и данной высоте.

Глава XIV. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛА

§ 1. Сложение и вычитание векторов

Вектором будем называть направленный отрезок (рис. 221). Направление вектора указывается стрелкой. Точка A называется *началом* вектора, а точка B — *концом*. Векторы обозначаются латинскими буквами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ..., а также $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ... (на первом месте ставится начало вектора).

Расстояние между началом и концом вектора называется *длиной* или *модулем* вектора. Длина вектора обозначается $|\boldsymbol{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Два вектора называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом. Это означает, что существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора (рис. 222).

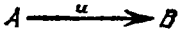


Рис. 221.

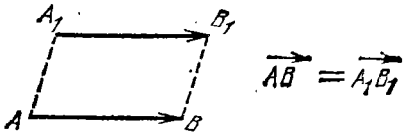


Рис. 222.

Два вектора называются *одинаково направленными (противоположно направленными)*, если они коллинеарны и у равных им векторов, имеющих общее начало, концы располагаются по одну сторону от начала (соответственно по разные стороны от начала).

Равные векторы одинаково направлены и имеют равные длины. Обратно, если векторы одинаково направлены и имеют равные длины, то они равны. От любой точки можно отложить вектор, равный данному и притом только один.

К векторам будем относить и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают. Нулевой вектор обозначается **0**. Его длина равна нулю. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору, так как он не имеет определенного направления. Все нулевые векторы равны.

Определение. Суммой вектора $\overrightarrow{AB}$ и вектора $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. Суммой вектора $\overrightarrow{AB}$ и произвольного вектора $\overrightarrow{PQ}$ называется сумма вектора $\overrightarrow{AB}$ и вектора $\overrightarrow{BC}$,

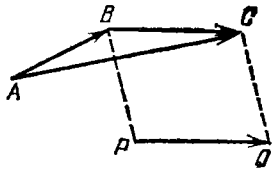


Рис. 223.

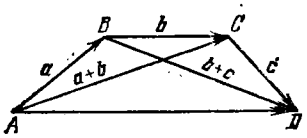


Рис. 224.

равного $\overrightarrow{PQ}$ (рис. 223). (Правило треугольника.) По определению для любого вектора $\boldsymbol{a}$ и нулевого вектора

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

Если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1$, то $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1$. Это следует из определения суммы векторов и равенства векторов.

Свойства сложения векторов.

1) *Сочетательное свойство*: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

Доказательство. Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от некоторой точки A: $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$. Вектор $\boldsymbol{b}$ отложим от точки B, а вектор $\boldsymbol{c}$ — от точки C (рис. 224): $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$.

Пользуясь правилом треугольника, получим:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC},\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BD},\ \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Следовательно, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Свойство доказано. Поэтому можно записывать без скобок:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

2) *Переместительное свойство*: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны (рис. 225). Тогда при откладывании

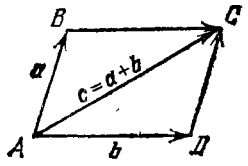


Рис. 225.

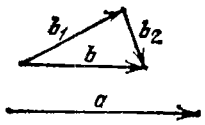


Рис. 226.

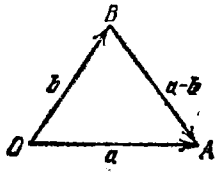


Рис. 227.

их от точки A ($\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$) получим, что точки A, B и D не лежат на одной прямой. Построим четвертую вершину C параллелограмма $ABCD$. Имеем: $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

По правилу треугольника

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\quad \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC},$$

и, следовательно, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

Рассмотрим теперь случай коллинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Заменим вектор $\boldsymbol{b}$ суммой любых двух неколлинеарных $\boldsymbol{a}$ векторов $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$: $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ (рис. 226). По доказанному

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}_2=$$
$$=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

Свойство доказано полностью.

Сложение двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно выполнять по «правилу параллелограмма»: векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ откладываются от одной точки A (см. рис. 225) и строится параллелограмм со сторонами AB и AD. Тогда $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

Задача. Доказать, что $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$, причем равенство имеет место, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и направлены одинаково или хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен нулю.

Решение предоставим читателю.

Вектором, *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$, называется вектор $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. По определению вектор, противоположный нулевому вектору, есть нулевой вектор.

Разностью векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (обозначается $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$) называется сумма вектора $\boldsymbol{a}$ и вектора $(-\boldsymbol{b})$, противоположного $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. Имеем $\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$, т. е. вычитание — действие, обратное сложению.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отложены от одной точки O (рис. 227), то для нахождения разности $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ удобно пользоваться таким правилом:

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

§ 2. Умножение вектора на число

Определение. *Произведением ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ на число $x \neq 0$* называется вектор, длина которого равна произведению длины вектора $\boldsymbol{a}$ на модуль числа x, а направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$ при $x > 0$ и противоположно направлению $\boldsymbol{a}$ при $x < 0$.

Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на число x обозначается через $x\boldsymbol{a}$ (числовой множитель пишется слева). По определению $|x\boldsymbol{a}| = |x| \cdot |\boldsymbol{a}|$.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ нулевой или число x равно нулю, то полагают:

$$x \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \quad \text{для любого числа } x,$$
$$0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \quad \text{для любого вектора } \boldsymbol{a}.$$

Приведем без доказательства основные свойства умножения вектора на число.

1) *Сочетательное свойство:* $(xy)\boldsymbol{a} = x(y\boldsymbol{a})$.

2) *Первое распределительное свойство:* $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}=(x+y)\boldsymbol{a}$.

3) *Второе распределительное свойство:* $x\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

Теорема. *Ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число x, что $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что если существует такое число x, что $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}$, то ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Но это очевидно: по определению произведения вектора на число векторы $\boldsymbol{a}$ и $x\boldsymbol{a}$ имеют либо одинаковые (если $x > 0$), либо противоположные (если $x < 0$) направления, и, следовательно, коллинеарны.

Докажем теперь обратное утверждение: если ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то существует число x, такое, что $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}$. По определению ненулевых коллинеарных векторов направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ либо совпадают, либо противоположны.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены одинаково, то $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}$ при $x=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$.

Если же направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ противоположны, то $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}$ при $x=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. Теорема доказана.

Задача. С помощью векторов доказать теорему: *три медианы треугольника пересекаются в одной точке, причем точка пересечения делит каждую медиану в отношении* 2:1, *считая от вершины.*

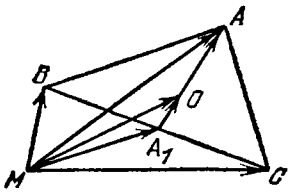


Рис. 228.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, O — точка медианы AA_1 и $|OA|:|OA_1|=2$ (рис. 228). Возьмем произвольную точку M и рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MA_1}$. Так как MA_1 — медиана $\triangle MBC$, то $\overrightarrow{MA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$. Поэтому $\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{MO}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$.

Так как $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{A_1O}$, то получим

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MO}=2\overrightarrow{MO}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}),$$

откуда $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$.

Если O_1 — точка медианы BB_1 и $|O_1B|:|O_1B_1|=2:1$, то $\overrightarrow{MO_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$, следовательно, $\overrightarrow{MO_1}=\overrightarrow{MO}$, и точки O_1 и O совпадают. Задача решена.

§ 3. Координаты вектора на плоскости

Вектор, длина которого принята за единицу измерения длины, называют *единичным*. Обозначим через $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ единичные векторы, отложенные от точки O в положительных направлениях на осях Ox и Oy прямоугольной системы координат (рис. 229).

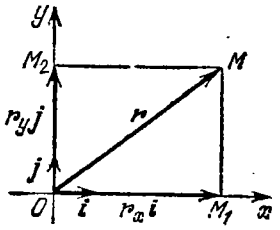


Рис. 229.

Пусть $\boldsymbol{r}$ — любой вектор на плоскости Oxy. Тогда вектор $\boldsymbol{r}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{r}=r_x\boldsymbol{i}+r_y\boldsymbol{j} \qquad (1)$$

и притом единственным образом.

Действительно, рассмотрим вектор $\overrightarrow{OM}$, равный $\boldsymbol{r}$. Если вектор $\overrightarrow{OM}$ неколлинеарен вектору $\boldsymbol{i}$ и неколлинеарен вектору $\boldsymbol{j}$, то проведем через точку M прямые, параллельные осям координат. Векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ коллинеарны соответственно векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. Следовательно, по теореме § 2 существуют такие числа

r_x и r_y, что $\overrightarrow{OM_1}=r_x\boldsymbol{i}$ и $\overrightarrow{OM_2}=r_y\boldsymbol{j}$. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, значит, $\boldsymbol{r}=r_x\boldsymbol{i}+r_y\boldsymbol{j}$.

Допустим теперь, что вектор $\boldsymbol{r}$ коллинеарен одному из векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, например $\boldsymbol{i}$. Тогда $\boldsymbol{r}=r_x\boldsymbol{i}$, а число r_y в этом случае равно нулю.

Итак, всегда $\boldsymbol{r}=r_x\boldsymbol{i}+r_y\boldsymbol{j}$.

Докажем единственность представления (1).

Допустим, что существует другое представление:

$$\boldsymbol{r}=r'_x\boldsymbol{i}+r'_y\boldsymbol{j}.$$

Тогда

$$r_x\boldsymbol{i}+r_y\boldsymbol{j}=r'_x\boldsymbol{i}+r'_y\boldsymbol{j},$$

и, следовательно,

$$(r_x-r'_x)\boldsymbol{i}+(r_y-r'_y)\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}.$$

Но это равенство возможно только при $r_x-r'_x=0$, $r_y-r'_y=0$, так как векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ неколлинеарны. Поэтому $r'_x=r_x$, $r'_y=r_y$. Единственность представления (1) доказана.

Если вектор $\boldsymbol{r}$ представлен в виде $\boldsymbol{r}=r_x\boldsymbol{i}+r_y\boldsymbol{j}$, то говорят, что вектор $\boldsymbol{r}$ разложен по векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. Векторы $\boldsymbol{r}_x=r_x\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{r}_y=r_y\boldsymbol{j}$ называют *составляющими вектора* $\boldsymbol{r}$ *по осям* Ox и Oy. Коэффициенты r_x и r_y разложения вектора $\boldsymbol{r}$ по единичным векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ называют *координатами* вектора $\boldsymbol{r}$ в данной системе координат и записывают $\boldsymbol{r}=(r_x;\ r_y)$. Тогда $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{r_x^2+r_y^2}$.

Из единственности представления (1) следует, что равные векторы имеют равные соответствующие координаты, и обратно, если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

Пусть дана точка $M(x;\ y)$. Тогда

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}, \tag{2}$$

где x и y—координаты точки M, т. е. $\boldsymbol{r}=(x;\ y)$, $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Теорема. *Каждая координата суммы векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *равна сумме соответствующих координат этих векторов; каждая координата произведения вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* k *равна произведению соответствующей координаты этого вектора на число* k.

Доказательство. Пусть

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}.$$

Пользуясь свойствами сложения векторов и умножения вектора на число, получим

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j})=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j};$$
$$k(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j})=(ka_x)\boldsymbol{i}+(ka_y)\boldsymbol{j}.$$

Значит, координаты вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ равны a_x+b_x и a_y+b_y, координаты вектора $k\boldsymbol{a}$ равны ka_x и ka_y. Теорема доказана.

Задача. Даны точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Доказать, что вектор $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$.

Решение. Имеем: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (рис. 230). Так как $\overrightarrow{OA}=(x_1;\ y_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2;\ y_2)$, то по теореме $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$.

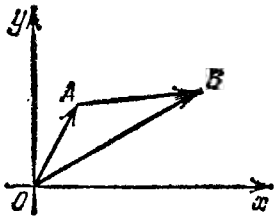


Рис. 230.

§ 4. Повороты на углы любой величины

Поворот как вид движения был рассмотрен в § 2 гл. XIII. Поворот определяется заданием: 1) центра O; 2) угла поворота α ($0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$); 3) направления поворота.

Выберем какое-нибудь направление поворота в качестве положительного, а противоположное направление будем считать отрицательным. Обычно считают положительным направление поворота против часовой стрелки. Поворот на α градусов против часовой стрелки будем называть поворотом на α, а поворот на α градусов по часовой стрелке — поворотом на $(-\alpha)$. При таком соглашении поворот полностью определяется заданием: 1) его центра O, 2) угла поворота α ($-180°\leqslant\alpha\leqslant 180°$).

Угол поворота теперь является направленным, величина которого может быть как положительной, так и отрицательной или нулем.

Рассматривая повороты как результат вращения, введем теперь повороты и на углы, лежащие вне пределов от $-180°$ до $180°$. Если $\beta=\alpha+360°n$ (n — целое число, $-180°\leqslant\alpha\leqslant 180°$), то поворотом около точки O на угол β называется поворот около точки O на угол α.

Например, поворот на 315° есть поворот на $-45°$, так как $315°=-45°+360°$ (рис. 231).

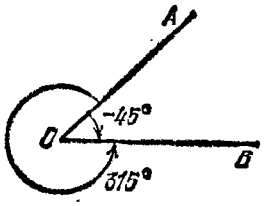


Рис. 231.

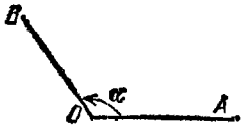


Рис. 232.

Градусная мера угла поворота может быть равной любому действительному числу.

Рассмотрим повороты около точки O с данным лучом OA. Для каждого поворота лучу OA будет соответствовать луч OB, положение которого определяется углом поворота α (рис. 232). Луч OA считается неподвижным (начальным) лучом поворота, а луч OB — подвижным, совершившим данный поворот.

Будем считать, что при повороте подвижного луча OB вокруг точки O от неподвижного луча OA образован угол α. Точку O называют *вершиной* угла α, неподвижный луч OA — *началом от-*

счета угла α, подвижный луч OB — подвижным лучом, задающим угол α. Если α и β — такие углы, что $\beta = \alpha + 360°n$ (n — целое число), то их подвижные лучи совпадают.

§ 5. Тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс угла)

Определение тригонометрических функций. Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице, будем называть *единичной окружностью* (рис. 233).

Примем за вершину любого угла начало координат — точку O. Положительную полуось абсцисс примем за неподвижный луч OA, т. е. за начало отсчета любого угла α. Этот луч пересечет единичную окружность в точке P. Отрезок OP будем называть *единичным неподвижным радиусом* или началом отсчета углов.

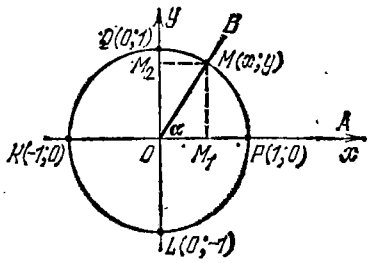


Рис. 233.

Подвижный луч OB пересечет единичную окружность в точке $M(x; y)$. Отрезок OM будем называть *подвижным единичным радиусом*, а точку M — *концом* подвижного единичного радиуса.

Условимся в дальнейшем говорить: подвижный единичный радиус OM задает угол α, понимая под этим, что соответствующий подвижный луч OB задает тот же самый угол α.

Определения.

1) *Синусом* угла α называется число, равное ординате конца подвижного единичного радиуса, задающего этот угол: $\sin\alpha = y$;

2) *Косинусом* угла α называется число, равное абсциссе конца подвижного единичного радиуса, задающего этот угол: $\cos\alpha = x$;

3) *Тангенсом* угла α называется число, равное отношению синуса угла α к косинусу угла α: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$.

Например, $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, так как точка M совпадает с точкой P, и поэтому $\operatorname{tg} 0° = 0$; $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, так как точка M совпадает с точкой Q, и поэтому $\operatorname{tg} 90°$ не существует.

Аналогично находим:

$\sin 180° = 0$, $\cos 180° = 1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$;

$\sin 270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\operatorname{tg} 270°$ не существует.

Синус и косинус являются функциями угла: для любого угла α существуют и притом единственные синус и косинус этого угла. Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого угла, а областью их значений является отрезок $[-1; 1]$, так как координаты точки $M(x; y)$, лежащей на единичной окружности, могут принимать значения от -1 до 1.

Функция $\operatorname{tg}\alpha$ определена для тех углов α, для которых $\cos\alpha \neq 0$. Например, на отрезке $[-180°; 180°]$ имеются два угла, для которых $\cos\alpha = 0$; это углы $90°$ и $-90°$. Следовательно, $\operatorname{tg} 90°$ и $\operatorname{tg}(-90°)$ не существуют.

Графики синуса и косинуса. Построим графики функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Сначала установим некоторые свойства этих функций.

1) Для любого угла α

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha. \tag{3}$$

Действительно, точки M и N единичной окружности, соответствующие углам α и $-\alpha$, симметричны относительно оси Ox (рис. 234). Если точка M имеет координаты x и y, то координаты точки N равны x и $-y$. Поэтому

$$\sin(-\alpha) = -y = -\sin\alpha;$$
$$\cos(-\alpha) = x = \cos\alpha,$$

и равенства (3) доказаны. Первое из них означает свойство нечетности синуса, а второе — свойство четности косинуса.

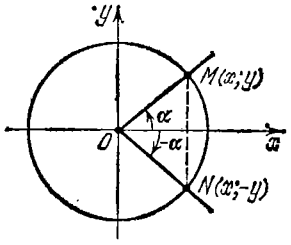


Рис. 234.

2) Для любого угла α

$$\sin(\alpha + 360°n) = \sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha + 360°n) = \cos\alpha,$$

где n — любое целое число.

Равенства (4) следуют из совпадения подвижных лучей для углов α и $\alpha + 360°n$ при любом целом n. Эти равенства означают, что функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ периодические с периодом $360°$. Поэтому достаточно построить графики $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ на отрезке $[-180°; 180°]$, а затем их продолжить периодически.

На рис. 235 и 236 приведены графики $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

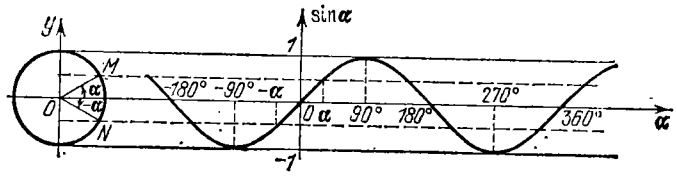


Рис. 235.

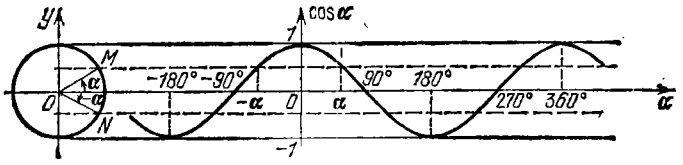


Рис. 236.

Значения синусов и косинусов углов α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$ находят по таблицам. В школе употребляются четырехзначные математические таблицы В. М. Брадиса.

При увеличении угла α от 0° до 90° значения функции $\sin\alpha$ увеличиваются от 0 до 1, а значения функции $\cos\alpha$ уменьшаются от 1 до 0. По свойству нечетности синуса его график симметричен относительно начала координат. График функции $\sin\alpha$ называется *синусоидой*. По свойству четности косинуса его график симметричен относительно оси ординат. График функции $\cos\alpha$ называется *косинусоидой*.

Заметим, что косинусоида получается сдвигом синусоиды влево вдоль оси абсцисс на расстояние, соответствующее углу 90°.

Вычисление координат вектора; угловой коэффициент прямой. В § 3 было показано, что каждый вектор плоскости можно разложить по единичным векторам прямоугольной системы координат (рис. 237), т. е. представить любой вектор $\boldsymbol{c}$ в виде суммы

$$\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j}, \qquad (5)$$

где c_x и c_y — координаты вектора $\boldsymbol{c}$. Выразим координаты вектора $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ через его длину $|\boldsymbol{c}|$ и угол α между лучом OC и положительным направлением оси абсцисс.

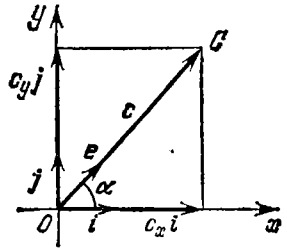


Рис. 237.

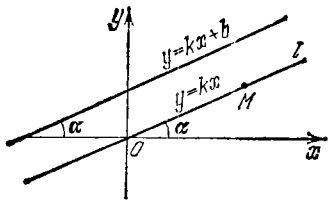


Рис. 238.

Пусть $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением данного вектора $\boldsymbol{c}$. Тогда $\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|\boldsymbol{e}$. Координаты вектора $\boldsymbol{e}$ равны $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ (по определению синуса и косинуса), т. е. $\boldsymbol{e} = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{i} + \sin\alpha \cdot \boldsymbol{j}$.

Значит,

$$\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|\boldsymbol{e} = |\boldsymbol{c}|(\cos\alpha \cdot \boldsymbol{i} + \sin\alpha \cdot \boldsymbol{j}) = |\boldsymbol{c}|\cos\alpha \cdot \boldsymbol{i} + |\boldsymbol{c}|\sin\alpha \cdot \boldsymbol{j}. \qquad (6)$$

Сравнивая равенства (5) и (6), получаем

$$c_x = |\boldsymbol{c}|\cos\alpha, \quad c_y = |\boldsymbol{c}|\sin\alpha. \qquad (7)$$

Рассмотрим применение формул (7).

Пусть прямая l проходит через начало координат (рис. 238). Ее уравнение $y = kx$. Коэффициент k называется угловым коэффициентом этой прямой.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка прямой l. Ее координаты $x = |\overrightarrow{OM}|\cos\alpha$, $y = |\overrightarrow{OM}|\sin\alpha$ согласно формулам (7). Ко-

ординаты точки удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому $|OM|\sin\alpha = k|OM|\cos\alpha$. Отсюда

$$k = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{или} \quad k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Прямые с уравнениями $y = kx$ и $y = kx + b$ параллельны, так как их угловые коэффициенты равны. Верно и обратное: если угловые коэффициенты двух прямых равны, то эти прямые параллельны.

Некоторые тригонометрические тождества.

1) *Для любого* α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{8}$$

Доказательство. По определению

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x,$$

где x и y — абсцисса и ордината точки M единичной окружности для данного угла α (см. рис. 233). В прямоугольном треугольнике OM_1M $|OM| = 1$, $|OM_1| = x$, $|M_1M| = y$. По теореме Пифагора $|OM|^2 = |OM_1|^2 + |M_1M|^2$, или $x^2 + y^2 = 1$, т. е. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Тождество (8) доказано.

2) *Для любого* α

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{9}$$

если $\cos\alpha \neq 0$.

Доказательство. По определению

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Применяя основное тригонометрическое тождество (8), получим

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Тождество (9) доказано.

3) *Для любого* α

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha, \tag{10}$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \tag{11}$$

Примем тождества (10) и (11) без доказательства. Для случая острого угла α ($0° < \alpha < 90°$) доказательства тождеств (10) и (11) будут приведены в § 6. Предоставим читателю проверить справедливость равенств (10) и (11) при $\alpha = 0°$ и $\alpha = 90°$.

Пример 1. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \quad (\cos\alpha \neq 0);$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0;\ \cos\alpha \neq 0)$$

Решение.

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Пример 2. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}6$, $0°<\alpha<90°$.

Решение. Из тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ следует, что

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \text{ или } |\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Если $0°<\alpha<90°$, то $\cos\alpha>0$, значит, $|\cos\alpha|=\cos\alpha$. Поэтому

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}36}=0{,}8,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}6}{0{,}8}=\frac{3}{4}.$$

Пример 3. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$, $90°<\alpha<180°$.

Решение. Известно, что $|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Если $90°<\alpha<180°$, то $\cos\alpha<0$, значит, $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$. Поэтому

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}64}=-0{,}6;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}8}{-0{,}6}=-\frac{4}{3}.$$

Пример 4. Найти $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $90°<\alpha<180°$.

Решение. Известно, что $|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Если $90°<\alpha<180°$, то $\sin\alpha>0$, значит, $|\sin\alpha|=\sin\alpha$. Поэтому

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Пример 5. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$, $90°<\alpha<180°$.

Решение. Из тождества

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

следует, что

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \text{ или } \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Если $90°<\alpha<180°$, то $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$; следовательно, $|\sin\alpha|=\sin\alpha$, $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$. Поэтому

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

§ 6. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b и гипотенузой c. Выберем прямоугольную систему координат Oxy так, как показано на рис. 239. В этом случае числа a и b являются координатами вектора $\overrightarrow{OB}$ (a—ордината, b—абсцисса точки B), c—длина вектора $\overrightarrow{OB}$. Применяя формулы (7) § 5, получим

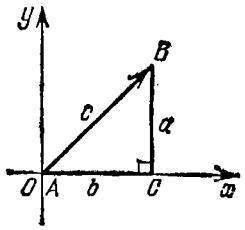


Рис. 239.

$$b=c\cos\widehat{A};\quad a=c\sin\widehat{A};$$

$$\sin\widehat{A}=\frac{a}{c};\quad \cos\widehat{A}=\frac{b}{c}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\widehat{A}=\frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}=\frac{a}{b}.$$

Аналогично находим для угла B:

$$\sin\widehat{B}=\frac{b}{c};\quad \cos\widehat{B}=\frac{a}{c};\quad \operatorname{tg}\widehat{B}=\frac{b}{a}.$$

Итак,

$$\sin\widehat{A}=\frac{a}{c};\quad \sin\widehat{B}=\frac{b}{c};\tag{12}$$

$$\cos\widehat{A}=\frac{b}{c};\quad \cos\widehat{B}=\frac{a}{c};\tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\widehat{A}=\frac{a}{b};\quad \operatorname{tg}\widehat{B}=\frac{b}{a}.\tag{14}$$

Формулы (12)—(14) можно прочитать так:

Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему.

Запишем формулы (12)—(14) в виде

$$a=c\sin\widehat{A};\quad b=c\sin\widehat{B};\tag{15}$$

$$b=c\cos\widehat{A};\quad a=c\cos\widehat{B};\tag{16}$$

$$a=b\operatorname{tg}\widehat{A};\quad b=a\operatorname{tg}\widehat{B}.\tag{17}$$

Формулы (15)—(17) можно прочитать так:

Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\sin\alpha$.

Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на $\cos\alpha$.

Катет, противолежащий углу α, *равен произведению второго катета на* $\operatorname{tg}\alpha$.

Эти правила выражают соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. Значение этих правил заключается в том, что они позволяют, зная одну из сторон прямоугольного треугольника и острый угол, находить две другие стороны, зная две стороны, находить острые углы.

Для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ составлены специальные таблицы. Эти таблицы позволяют для данного острого угла α найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ или по данным значениям $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ найти соответствующий острый угол α.

В прямоугольном треугольнике ABC

$$\hat{A}+\hat{B}=90^\circ;\quad a^2+b^2=c^2 \tag{18}$$

(теорема Пифагора).

Решим несколько задач на вычисление элементов прямоугольного треугольника по двум его известным элементам.

Задача 1. Дано: a и b. Найти: $\hat{A}$, $\hat{B}$, c.

Решение.

1) $\operatorname{tg}\hat{A}=\frac{a}{b}$ (формула 14); величину угла A находим из таблиц.

2) $\hat{B}=90^\circ-\hat{A}$ (формула 18).

3) $c=\frac{a}{\sin\hat{A}}$ (формула 12) или $c=\sqrt{a^2+b^2}$ (формула 18).

Задача 2. Дано: a и c. Найти: $\hat{A}$, $\hat{B}$, b.

Решение.

1) $\sin\hat{A}=\frac{a}{c}$ (формула 12); величину угла A находим из таблиц.

2) $\hat{B}=90^\circ-\hat{A}$ (формула 18).

3) $b=c\sin\hat{B}$ (формула 15) или $b=c\cos\hat{A}$ (формула 16).

Задача 3. Дано: a и $\hat{B}$. Найти $\hat{A}$, b, c.

Решение.

1) $\hat{A}=90^\circ-\hat{B}$ (формула 18).

2) $b=a\operatorname{tg}\hat{B}$ (формула 17).

3) $c=\frac{a}{\cos\hat{B}}$ (формула 13).

Задача 4. Дано: c и $\hat{A}$. Найти $\hat{B}$, a, b.

Решение.

1) $\hat{B}=90^\circ-\hat{A}$ (формула 18).

2) $a=c\sin\hat{A}$ (формула 15).

3) $b=c\cos\hat{A}$ (формула 16).

Отметим, что предложенные способы решения этих задач не являются единственными.

Теорема 1. *Для любого острого угла* α

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha;\quad \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с острым углом α при вершине A (см. рис. 239). Тогда острый угол при вершине B будет $90°-\alpha$. Из формул (12) и (13) следует, что

$$\sin(90°-\alpha)=\frac{b}{c}=\cos\alpha;\quad \cos(90°-\alpha)=\frac{a}{c}=\sin\alpha.$$

Равенства (19) доказаны.

Найдем значения синуса, косинуса и тангенса для углов в 30°, 45°, 60°. Пусть $\widehat{A}=\alpha$. Тогда $\widehat{B}=90°-\alpha$.

Если $\alpha=30°$, то $a=\frac{1}{2}c$, так как длина катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°, равна половине длины гипотенузы (§ 1 гл. X). По теореме Пифагора

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому

$$\sin 30°=\frac{1}{2};\quad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \operatorname{tg} 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Если $\alpha=45°$, то $\widehat{A}=\widehat{B}$ и ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник, $a=b$. По теореме Пифагора гипотенуза $c=\sqrt{a^2+b^2}=a\sqrt{2}$. Поэтому

$$\sin 45°=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \cos 45°=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \operatorname{tg} 45°=1,$$

или

$$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \operatorname{tg} 45°=1.$$

Если $\alpha=60°$, то по теореме 1

$$\sin 60°=\cos 30°;\quad \cos 60°=\sin 30°,$$

следовательно,

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos 60°=\frac{1}{2};\quad \operatorname{tg} 60°=\sqrt{3}.$$

Теорема 2. *Для любого угла* α $(0°<\alpha<180°)$

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha;\quad \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть α—острый угол (рис. 240). Тогда $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$. Треугольники OMM_1 и ONN_1 равны по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников следует, что $|MM_1| = |NN_1|$, $|OM_1| = |ON_1|$. Так как точка M имеет координаты x и y, то точка N будет иметь координаты $(-x)$ и y. Следовательно,

$$\sin(180° - \alpha) = y = \sin\alpha;$$
$$\cos(180° - \alpha) = -x = -\cos\alpha.$$

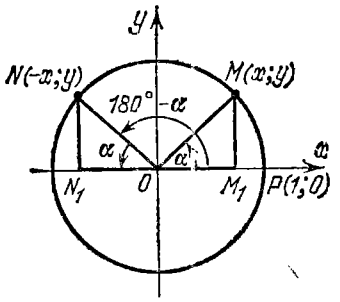


Рис. 240.

В случае, когда α—тупой угол, доказательство ничем не отличается от приведенного (соответствующие точки M и N симметричны относительно оси Oy). Равенства (20) доказаны.

Например,

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$
$$\operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}.$$

§ 7. Метрические соотношения в произвольном треугольнике; теорема синусов и теорема косинусов

Пусть ABC—произвольный треугольник (рис. 241).

Теорема синусов. *В любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла есть величина постоянная, равная диаметру описанной окружности:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

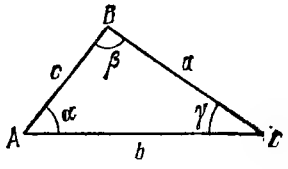


Рис. 241.

Доказательство. Опишем окружность около данного треугольника ABC (рис. 242). Пусть R—ее радиус. Возьмем одну из вершин треугольника, например A; через одну из других вершин, например через B, проведем диаметр BA_1 описанной окружности. Треугольник A_1BC прямоугольный, так как вписанный угол A_1CB опирается на диаметр. Из этого треугольника найдем

$$a = 2R\sin\alpha_1.$$

Если α—острый угол, то $\alpha = \alpha_1$, так как вписанные углы A и A_1 опираются на одну и ту же дугу (рис. 242, *а*). Значит,

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha.$$

Если α — тупой угол, то из теоремы о вписанном угле следует, что $\alpha+\alpha_1=180°$ или $\alpha_1=180°-\alpha$ (рис. 242, *б*). Значит,

$$\sin\alpha_1=\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha.$$

Поэтому

$$a=2R\sin\alpha.$$

Если α — прямой угол, то $a=2R$ (рис. 242, *в*); $\sin 90°=1$, и равенство $a=2R\sin\alpha$ также справедливо.

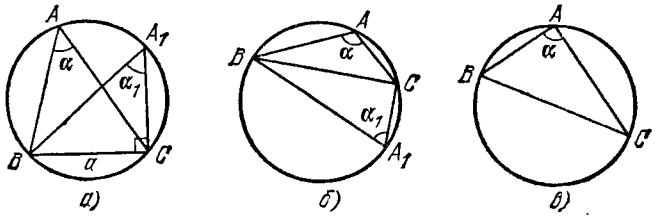


Рис. 242.

Аналогичные равенства найдем и для углов β и γ. Итак,

$$a=2R\sin\alpha;\quad b=2R\sin\beta;\quad c=2R\sin\gamma.$$

Поэтому $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$. Теорема синусов доказана.

Из теоремы синусов следует, что против большего угла в треугольнике лежит большая сторона, и обратно, против большей стороны лежит больший угол.

Действительно, если углы α и β острые, то при $\alpha>\beta$ будет $\sin\alpha>\sin\beta$ (при увеличении угла от 0° до 90° значения синуса увеличиваются; § 5). А так как

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},$$

то $a>b$. Если же угол α тупой, то внешний угол треугольника, равный $180°-\alpha$, острый. Причем $180°-\alpha$ больше β, как внешний угол треугольника, не смежный с β. Поэтому $\sin\alpha=\sin(180°-\alpha)>\sin\beta$, и значит, снова $a>b$. Обратное утверждение доказывается от противного

Теорема косинусов. *Квадрат стороны любого треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:*

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая.

Угол A острый (рис. 243, *а*). Проведем из вершины B или C высоту, пересекающую противолежащую сторону. Допустим, что

высота BD пересекает сторону AC. По теореме Пифагора получим

$$a^2 = h^2 + (b - b_1)^2, \tag{21}$$

$$h^2 = c^2 - b_1^2. \tag{22}$$

Подставляя выражение (22) в равенство (21), получим

$$a^2 = c^2 - b_1^2 + (b - b_1)^2,$$

или

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb_1. \tag{23}$$

Так как $b_1 = c\cos\alpha$, то из равенства (23) следует, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Угол A тупой. Проведем из вершины B высоту BD (рис. 243, *б*). Рассмотрим прямоугольные треугольники BCD и ABD. По теореме

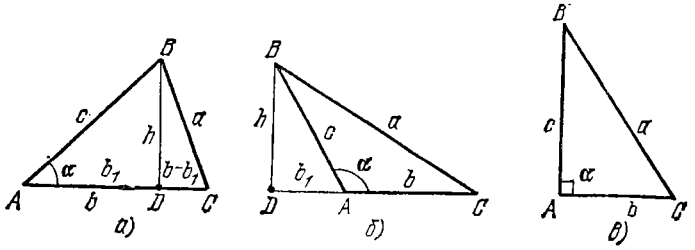


Рис. 243.

Пифагора получаем

$$a^2 = h^2 + (b + b_1)^2, \tag{24}$$

$$h^2 = c^2 - b_1^2. \tag{25}$$

Подставим выражение (25) в равенство (24):

$$a^2 = c^2 - b_1^2 + (b + b_1)^2,$$

или

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bb_1. \tag{26}$$

Так как $b_1 = c\cos(180° - \alpha) = -c\cos\alpha$, то из равенства (26) следует, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Угол A прямой (рис. 243, *в*). В этом случае $\cos\alpha = \cos 90° = 0$. Пользуясь теоремой Пифагора, получаем

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Теорема косинусов доказана.

Записав формулу $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ в виде

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

заметим, что:

1) если $a^2=b^2+c^2$, то $\cos\alpha=0$ и $\alpha=90°$; следовательно, если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный (теорема, обратная теореме Пифагора);

2) если $a^2<b^2+c^2$, то $\cos\alpha>0$ и $0°<\alpha<90°$; следовательно, если a — большая сторона и $a^2<b^2+c^2$, то треугольник остроугольный;

3) если $a^2>b^2+c^2$, то $\cos\alpha<0$ и $90°<\alpha<180°$, т. е. в этом случае треугольник тупоугольный.

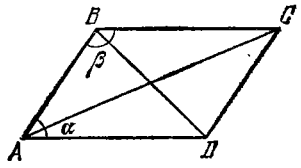


Рис. 244.

Теорема. *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 244). Применим теорему косинусов к треугольникам ABC и ABD. Получим

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\beta;$$
$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\alpha.$$

Так как $\beta=180°-\alpha$, то, складывая эти равенства и замечая, что $\cos\beta=\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, $AB=CD$, $BC=AD$, получим

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

Теорема доказана.

Применяя теоремы синусов и косинусов, рассмотрим решение произвольных треугольников. Решение треугольников состоит в вычислении неизвестных элементов (сторон и углов треугольника) через известные элементы.

Так же, как и для прямоугольных треугольников, существуют четыре основных случая решения косоугольных треугольников.

Задача 1. Даны три стороны треугольника. Найти его углы.

Решение. По теореме косинусов находим углы треугольника; их сумма равна 180°. Эта задача имеет решение, если большая из сторон меньше суммы двух других. Единственность решения следует из третьего признака равенства треугольников.

Задача 2. Дана сторона и два угла треугольника. Найти третий угол и остальные две стороны.

Решение. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то третий угол вычисляется через заданные углы.

Имея сторону и все три угла, по теореме синусов находим две остальные стороны. Задача всегда имеет решение и притом единственное. Конечно, сумма двух данных углов должна быть меньше 180°. Единственность решения следует из второго признака равенства треугольников.

Задача 3. Даны две стороны, например a и b, и угол γ, противолежащий третьей стороне. Найти остальные два угла и третью сторону.

Решение. По теореме косинусов находим сторону c. Теперь, имея три стороны, по теореме косинусов можно еще найти один

угол, например α. Тогда $\beta = 180° - \alpha - \gamma$. Задача всегда имеет решение и притом единственное. Единственность решения следует из первого признака равенства треугольников.

Задача 4. Даны две стороны, например a и b, и угол противолежащий одной из них, например α. Найти остальные два угла и третью сторону.

Решение. По теореме синусов находим $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$. По значению $\sin\beta$ находим отвечающие ему углы β_1 и β_2 (данному значению синуса на отрезке от 0° до 180° отвечают два угла; это следует из формулы $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$). Выбираем из них один или оба, учитывая, что против большей из сторон a и b лежит больший угол. Зная углы α и β, находим угол $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, а затем сторону c по теореме синусов.

Эта задача может не иметь решения, иметь одно решение или два решения. (При исследовании рассматриваются случаи $a \geqslant b$ и $a < b$; в случае $a < b$ результат исследования зависит от соотношения между a и $b\sin\alpha$.)

Отметим, что предложенные способы решения этих задач не являются единственными.

Упражнения

Раздел I

1. Какой вид имеет четырехугольник $ABCD$, если известно, что: а) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; б) векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны?

2. Доказать с помощью векторов теорему о средней линии треугольника.

3. Векторы $\boldsymbol{a} = (1; -1)$ и $\boldsymbol{b} = (-2; m)$ коллинеарны. Найти m.

4. Длина вектора $\boldsymbol{a} = (5; n)$ равна 13. Найти n.

5. Даны точки $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$, $D(2; 1)$. Доказать, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

6. Найти: а) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$, $0° < \alpha < 90°$; б) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$; в) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$.

7. Найти значения синуса, косинуса и тангенса для углов в 135° и 150°.

8. У треугольника ABC: $|AB| = 15$ см, $|AC| = 10$ см. Может ли $\sin\hat{B} = \frac{3}{4}$?

9. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними α. Найти стороны параллелограмма.

10. У треугольника две стороны 20 м и 21 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найти третью сторону.

11. Не вычисляя величины углов треугольника, указать вид каждого из треугольников (относительно углов), если его стороны равны: а) 7; 8; 12; б) 0,3; 0,4; 0,5; в) 8; 10; 12.

12. Доказать теорему: если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами не равны, то против большего угла лежит большая сторона.

13. В параллелограмме острый угол равен 60°. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 22 см, а меньшая диагональ равна 7 см.

14. В треугольнике ABC: $|BC|=6$ см, $\widehat{A}=60°$, $\widehat{B}=45°$. Найти длины сторон AB и AC.

Раздел II

15. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон CD и AD. Выразите вектор MN через векторы $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$.

16. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если точки A и B имеют следующие координаты:

а) $A(3;\ 1)$, $B(5;\ 0)$; б) $A(-1;\ 3)$, $B(-2;\ 1)$;

в) $A(0;\ 4)$, $B(5;\ 0)$; г) $A(3;\ 1)$, $B(-1;\ -3)$.

17. От точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$. Найдите координаты точки B в каждом из следующих случаев:

а) $A(0,\ 0)$, $\boldsymbol{a}=(-2;\ 1)$; б) $A(-1;\ 5)$, $\boldsymbol{a}=(1;\ -3)$;

в) $A(2;\ 7)$, $\boldsymbol{a}=(-2;\ -5)$.

18. Известны координаты вершин A, B, C параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершины D:

а) $A(2;\ 3)$, $B(1;\ 4)$, $C(0;\ -2)$;

б) $A(-2;\ -1)$, $B(3;\ 0)$, $C(1;\ -2)$.

19. Вычислите элементы прямоугольного треугольника по двум его известным элементам, если:

а) $a=118$, $b=209$; б) $a=3{,}11$, $b=4{,}89$;

в) $c=4{,}18$, $\widehat{A}=71°18'$; г) $c=0{,}119$, $\widehat{B}=29°14'$;

д) $a=14{,}3$, $\widehat{A}=19°36'$; е) $b=39{,}4$, $\widehat{B}=74°12'$;

ж) $c=3{,}75$, $a=2{,}11$; з) $c=118$, $b=69$.

20. Диагонали параллелограмма имеют длины 5 см и 8 см; угол между диагоналями равен 77°18′. Определите стороны параллелограмма.

21. Даны две стороны треугольника и угол, противолежащий третьей стороне. Найдите остальные два угла и третью сторону, если $a=49{,}4$, $b=26{,}4$, $\gamma=47°20'$.

22. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если $a=28$, $b=35$, $c=42$.

23. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если:

а) $a=113$, $\alpha=75°15'$, $\beta=29°13'$;

б) $b=31{,}2$, $\alpha=124°7'$, $\beta=18°39'$.

24. У треугольника заданы две стороны a, b и угол α, противолежащий стороне a. Найдите остальные углы и сторону треугольника, если:

а) $a=31$, $b=18$, $\alpha=31°36'$;

б) $a=5{,}8$, $b=31$, $\alpha=8°21'$.

Глава XV. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Многоугольник, или простая замкнутая ломаная, разбивает множество точек плоскости, не принадлежащих многоугольнику, на две области—внутреннюю и внешнюю. Во внешней области

найдется прямая, которая вся расположена в этой области. Во внутренней области такой прямой нет. Точки внутренней области называются *внутренними*, а точки внешней области—*внешними* относительно многоугольника.

Фигуру, образованную многоугольником вместе с его внутренней областью, называют *многоугольной областью* (или пополненным многоугольником).

В повседневной жизни, когда говорят о площади треугольника, четырехугольника или о площади многоугольника, имеют в виду площадь той части плоскости, которая ограничена многоугольником. Будем поступать так же, т. е. будем говорить о площади многоугольника, понимая под этим площадь многоугольной области.

§ 1. Понятие площади многоугольника

Понятие площади аналогично понятию длины отрезка.

Если выбрана единица измерения, то каждый отрезок имеет длину. Равные отрезки имеют равные длины. Если отрезок AC точкой B между A и C разделен на два отрезка AB и BC, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC. Длина отрезка выражается положительным числом.

Точно так же, если выбрана единица измерения (например, квадрат), то каждый многоугольник имеет площадь.

Сформулируем условия, которые позволят площади многоугольников выразить через положительные числа. Они называются основными свойствами площадей.

1) *Если два многоугольника равны, то их площади равны.*

2) *Если многоугольник составлен из неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.*

3) *Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны.*

Поясним свойство 2). Говорят, что многоугольник F составлен из неперекрывающихся многоугольников F_1, F_2,..., F_n, если каждая точка многоугольника F принадлежит хотя бы одному из многоугольников F_1, F_2,..., F_n и никакие два из этих многоугольников не имеют общих внутренних точек.

Согласно основному свойству 3) число, выражающее площадь квадрата, а следовательно, и любого другого многоугольника, зависит от выбора единицы измерения отрезков. Например, если за единицу измерения отрезков принят 1 см, то за единицу измерения площадей принимают квадрат с длиной стороны 1 см. Площадь этого квадрата обозначают 1 см^2, и в этом случае площадь любого многоугольника выражают в квадратных сантиметрах. Таким образом, каждый раз рядом с числом, выражающим площадь многоугольника, указывают единицу измерения: мм^2, см^2, м^2, км^2 и т. д.

Кроме многоугольников, будем рассматривать простые фигуры. Фигура называется *простой*, если ее можно разбить на некоторое

число неперекрывающихся треугольников. В частности, такие фигуры, как параллелограмм, трапеция, выпуклый многоугольник, являются простыми. Площадь фигуры F будем обозначать так: S_F.

Для простых фигур, а также более сложных фигур (например, круга) справедливы общие свойства площадей.

1) *Равные фигуры имеют равные площади.*

2) *Если фигура F_1 составляет часть фигуры F, то $S_{F_1} \leqslant S_F$.*

3) *Если фигура F с помощью прямой разделена на части F_1 и F_2, то $S_F = S_{F_1} + S_{F_2}$.*

Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими*. Равные фигуры всегда равновелики. Обратное неверно: если две фигуры имеют равные площади, то они не обязательно равны.

§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

Площадь параллелограмма. Сначала применим свойства площадей многоугольника к выводу формулы для площади прямоугольника.

Условимся одну из сторон параллелограмма, в частности прямоугольника, называть *основанием*, а перпендикуляр, проведенный к прямой, содержащей эту сторону, из любой точки противоположной стороны,—*высотой*.

Для краткости будем часто говорить «основание» и «высота», понимая под этим их длины.

Теорема 1. *Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.*

Доказательство. Пусть $ABCD$—данный прямоугольник, а S—его площадь (рис. 245,*а*). Примем сторону AB за основание, а AD—за высоту и обозначим $|AB| = a$, $|AD| = h$.

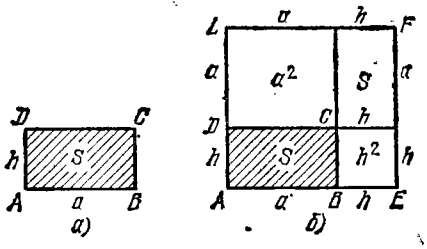


Рис. 245.

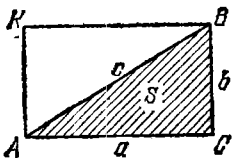


Рис. 246.

Дополним прямоугольник $ABCD$ до квадрата $AEFL$, как показано на рис. 245,*б*. Так как $|AE| = |AL| = a + h$, то по свойству 3) площадей $S_{AEFL} = (a+h)^2$. Квадрат $AEFL$ составлен из четырех неперекрывающихся четырехугольников: данного прямоугольника $ABCD$ с площадью S, равного ему прямоугольника с площадью S (свойство 1) площадей) и двух квадратов с площадями a^2 и h^2 (свойство 3) площадей). По свойству 2) площадей многоугольников

$$(a+h)^2 = a^2 + h^2 + S + S,$$

или

$$a^2+2ah+h^2=a^2+h^2+2S.$$

Отсюда получаем $S=ah$. Теорема доказана.

Следствие. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов.*

Доказательство. Пусть ABC—прямоугольный треугольник с прямым углом C; S—его площадь, $|AC|=a$, $|BC|=b$ (рис. 246). Достроим его до прямоугольника. Тогда $S_{AKBC}=S+S_{AKB}$ или $S_{AKBC}=2S$, так как треугольники ABC и AKB равны и, следовательно, имеют равные площади. Отсюда, применяя теорему о площади прямоугольника, получаем

$$S=\frac{1}{2}\,|AC|\cdot|BC| \text{ или } S=\frac{1}{2}ab.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника $c^2=a^2+b^2$. Пользуясь формулой для вычисления площади квадрата, можно дать другую формулировку теореме Пифагора: *площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.*

Теорема 2. *Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.*

Доказательство. Пусть $ABCD$—данный параллелограмм, а S—его площадь (рис. 247). Если он не является прямоугольником, то один из его углов, A или B, острый. Пусть, например, угол A острый. Проведем высоту AE. Обозначим $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|AE|=h$. Площадь трапеции $ABCE$ равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и треугольника ADE.

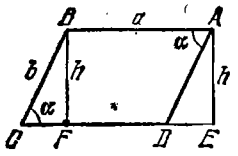


Рис. 247.

Проведем высоту BF. Тогда площадь трапеции $ABCE$ равна сумме площадей прямоугольника $ABFE$ и треугольника BCF. Прямоугольные треугольники ADE и BCF равны, а значит, имеют равные площади.

Отсюда следует, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $ABFE$, т. е. $S=ah$. Теорема доказана.

Следствие. *Площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними.*

Доказательство. Пусть $\hat{A}=\hat{C}=\alpha$. Из прямоугольного треугольника BCF (см. рис. 247) получим, что $|BF|=|BC|\sin\alpha$, т. е. $h=b\sin\alpha$. Результат не изменится, если взять тупой угол B: если $\hat{B}=\alpha$, то $\hat{A}=180°-\alpha$, а $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$. Поэтому $S=ab\sin\alpha$.

Площадь треугольника. Условимся одну из сторон треугольника называть *основанием*, а перпендикуляр, проведенный из противоположной вершины к прямой, содержащей эту сторону,— *высотой*.

Теорема 3. *Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.*

Доказательство. Пусть ABC—данный треугольник, а S—его площадь (рис. 248). Достроим треугольник ABC до параллелограмма. Площадь параллелограмма $AKBC$ равна сумме площадей треугольников ABC и ABK. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC: $S_{AKBC}=2S=ah$, так как высота параллелограмма, соответствующая стороне BC, равна высоте треугольника ABC, проведенной к стороне BC. Поэтому

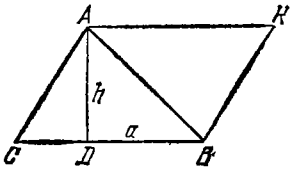


Рис. 248.

$$S=\frac{1}{2}ah, \qquad (1)$$

где $|BC|=a$, $|AD|=h$. Теорема доказана.

Следствие. *Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.*

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC длины сторон равны a, b, c, а противолежащие им углы α, β, γ (рис. 249).

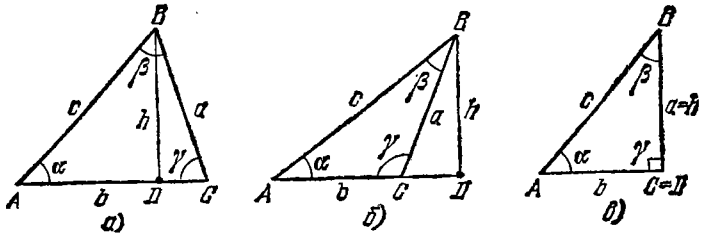


Рис. 249.

Примем сторону AC за основание и проведем высоту BD. Тогда

$$S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}bh.$$

Выразим $h=|BD|$ через c и синус угла α. Для этого надо рассмотреть несколько случаев. Но во всех этих случаях $h=c\sin\alpha$:

$h=c\sin\alpha$, (рис. 249, *а*),
$h=c\sin(180°-\alpha)=c\sin\alpha$ (рис. 249, *б*),
$h=c=c\sin\alpha$ $(\alpha=90°)$. (рис. 249, *в*).

Поэтому

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha. \qquad (2)$$

Например, если a—сторона равностороннего треугольника, то его площадь

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Действительно, по формуле (2) при $b=c=a$, $\alpha=60^\circ$ получаем

$$S=\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

так как $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Кроме формул (1) и (2), докажем и другие формулы для вычисления площади треугольника.

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S=pr, \tag{3}$$

где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Доказательство. Пусть O—центр окружности, вписанной в треугольник, r—ее радиус (рис. 250). Соединив центр O с вершинами A, B и C, получим треугольники AOB, BOC и AOC с высотами, равными r. Согласно свойству площадей

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=$$
$$=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br=\frac{r}{2}(a+b+c)=pr,$$

что и требовалось доказать.

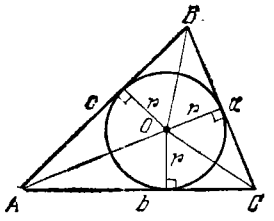


Рис. 250.

Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности

$$S=\frac{abc}{4R}. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно формуле (2)

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

где R—радиус окружности, описанной около треугольника. Из равенства

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

следует, что

$$\sin\alpha=\frac{a}{2R}.$$

Подставляя выражение для $\sin\alpha$ в формулу (2), получим

$$S=\frac{abc}{4R}.$$

Формула Герона. *Площадь треугольника*

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{5}$$

где $p=\frac{a+b+c}{2}$—*половина периметра треугольника.*

Доказательство. Из формулы $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ находим

$$\sin\alpha=\frac{2S}{bc};$$

по теореме косинусов $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, или

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Получим

$$\left(\frac{2S}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1.$$

Отсюда, применяя формулу для разности квадратов, имеем

$$S^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{16}=\frac{((b+c)^2-a^2)\,(a^2-(b-c)^2)}{16}=$$

$$=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}=$$

$$=p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c);$$

$$S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Формула Герона позволяет вычислить площадь треугольника по его трем сторонам. Итак, для вычисления площади треугольника получены формулы (1)—(5).

Формулы (3) и (4) можно использовать для вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей, если известны стороны треугольника. Тогда его площадь можно вычислить по формуле Герона, а затем найти $r=\frac{S}{p}$, $R=\frac{abc}{4S}$.

Задача 1. Разделить треугольник на две равновеликие части прямой, проходящей через данную точку его стороны.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник и M — данная точка на его стороне AC (рис. 251). Если M — середина стороны AC, то BM — медиана и $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle BCM}$. Пусть M не является серединой стороны AC, например, $|AM|<|MC|$. Проведем медиану BD, соединим точки B и M, проведем $DN\parallel BM$. Прямая MN — искомая. Докажем это.

Имеем

$$S_{\triangle MNC}=S_{\triangle MOD}+S_{DONC}.$$

В трапеции $BNDM$ треугольники MOD и BON равновелики:

$$S_{\triangle MOD}+S_{\triangle BOM}=S_{\triangle MBD};\ S_{\triangle BON}+S_{\triangle BOM}=S_{\triangle MBN},$$

но $S_{\triangle MBD}=S_{\triangle MBN}$, так как треугольники имеют общее основание и равные высоты. Значит,

$$S_{\triangle MNC}=S_{\triangle BON}+S_{DONC}=S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}\,S_{\triangle ABC}.$$

Задача 2. Медианы треугольника равны 9 см, 12 см и 15 см. Найти площадь треугольника.

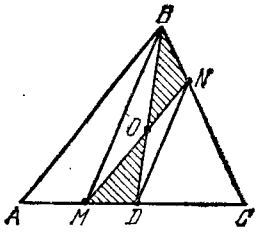


Рис. 251.

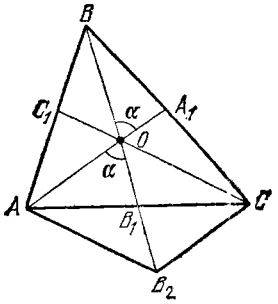


Рис. 252.

Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1—медианы треугольника ABC, O—точка их пересечения (рис. 252). Получим шесть равновеликих треугольников:

$$S_{\triangle AOB_1} = S_{\triangle B_1OC};$$

$$S_{\triangle AOB_1} = \frac{1}{2}|AO|\cdot|B_1O|\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}|AA_1|\cdot\frac{1}{3}|BB_1|\sin\alpha;$$

$$S_{\triangle BOA_1} = \frac{1}{2}|BO|\cdot|A_1O|\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}|BB_1|\cdot\frac{1}{3}|AA_1|\sin\alpha,$$

следовательно, $S_{\triangle AOB_1} = S_{\triangle BOA_1}$ и т. д.

Выполним построение такое же, как при решении задачи в § 5 гл. XI (см. рис. 187). Каждая из сторон $\triangle COB_2$ равна 2/3 соответствующей медианы $\triangle ABC$. Площадь $\triangle COB_2$ с данными сторонами можно найти по формуле Герона, а затем найти $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle COB_2}$.

Стороны $\triangle COB_2$ равны 6 см, 8 см и 10 см. Заметим, что $6^2+8^2=10^2$, и значит, $\triangle COB_2$—прямоугольный с катетами 6 см и 8 см. Поэтому $S_{\triangle COB_2} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24$ см^2, $S_{\triangle ABC} = 72$ см^2.

Площадь трапеции. *Высотой* трапеции будем называть перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание.

Теорема 4. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.*

Доказательство. Пусть $ABCD$—данная трапеция, a и b—ее основания, h—высота (рис. 253). Проведя диагональ AC, получим два треугольника. Примем за основание треугольника ACD отрезок AD, а за основание треугольника ABC—отрезок BC. Высоты этих треугольников равны высоте трапеции h. Поэтому

$$S_{\triangle ACD} = \frac{ah}{2};\ S_{\triangle ABC} = \frac{bh}{2}.$$

Тогда площадь трапеции (по свойству 2) площадей) равна

$$S_{ABCD}=\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2};\ S_{ABCD}=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

Следствие. *Площадь трапеции равна произведению средней линии трапеции на высоту.*

Задача 3. Основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, параллельного им и делящего площадь трапеции пополам.

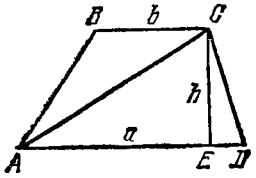


Рис. 253.

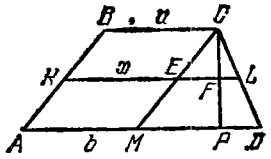


Рис. 254.

Решение. Пусть отрезок $KL=x$ делит площадь трапеции $ABCD$ ($BC=a$, $AD=b$) пополам (рис. 254). Проведем $CM\parallel AB$. Обозначим h—высота $\triangle CEL$, H—высота трапеции $ABCD$. Так как $\triangle CEL\sim\triangle CMD$, то $\frac{EL}{MD}=\frac{CF}{CP}$ или $\frac{x-a}{b-a}=\frac{h}{H}$.

По условию $S_{KBCL}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Поэтому

$$\frac{x+a}{2}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{b+a}{2}\cdot H \text{ или } \frac{h}{H}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b+a}{x+a}.$$

Значит,

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b+a}{x+a},$$

откуда $2(x^2-a^2)=b^2-a^2$, т. е. $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

§ 3. Площадь многоугольника. Отношение площадей подобных многоугольников

Для вычисления площади произвольного многоугольника разбивают этот многоугольник на неперекрывающиеся треугольники и находят площадь каждого треугольника. Тогда сумма этих площадей будет равна площади S данного многоугольника (рис. 255).

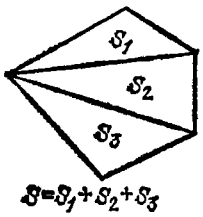


Рис. 255.

Теорема. *Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

Доказательство. Пусть $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$—данные подобные многоугольники (см. рис. 204). Проведя диагонали из вершин A и A_1, разложим эти многоугольники на подобные треугольники (см. рис. 205). Рассмотрим подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. В подобных треугольниках отношение двух соот-

ветственных высот равно отношению двух соответственных сторон (§ 2 гл. XII). Поэтому

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}|A_1B_1|h_1}{\frac{1}{2}|AB|h}=\frac{|A_1B_1|}{|AB|}\cdot\frac{h_1}{h}=\frac{|A_1B_1|^2}{|AB|^2}=k^2,$$

h и h_1 — соответствующие высоты, k — коэффициент подобия. Следовательно,

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}}=k^2;$$

Теорема доказана.

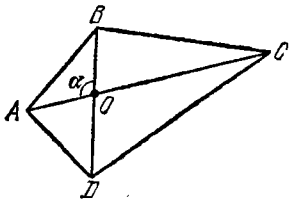


Рис. 256.

Задача 4. Доказать, что площадь любого выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Решение. Четырехугольник $ABCD$ диагоналями AC и BD разбивается на четыре треугольника (рис. 256). Пусть $|AC|=c$, $|BD|=d$. Обозначим $|AO|=x$, $|BO|=y$, $|CO|=z$, $|DO|=t$; $x+z=c$, $y+t=d$. Тогда

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}xy\sin\alpha,\quad S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}yz\sin(180°-\alpha)=\frac{1}{2}yz\sin\alpha,$$

$$S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}zt\sin\alpha,\quad S_{\triangle DOA}=\frac{1}{2}tx\sin(180°-\alpha)=\frac{1}{2}tx\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle DOA}=$$
$$=\frac{1}{2}\sin\alpha(xy+yz+zt+tx)=$$
$$=\frac{1}{2}\sin\alpha(y(x+z)+t(z+x))=\frac{1}{2}(x+z)(y+t)\sin\alpha$$

или

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}cd\sin\alpha. \qquad (6)$$

В частности, *площадь трапеции равна половине произведения ее диагоналей на синус угла между ними.*

Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то при $\alpha=90°$ из формулы (6) следует: *площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.*

Упражнения

Раздел I

1. Найти стороны прямоугольника, если его стороны относятся как 4:9, а площадь равна 144 м².

2. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найти острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.

3. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из фигур имеет большую площадь?

4. Найти площадь ромба, если его высота равна 12 дм, а меньшая диагональ 13 дм.

5. Найти площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой a.

6. Найти площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса R.

7. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен r. Найти площадь треугольника.

8. Доказать, что сумма расстояний от любой точки равностороннего треугольника до его сторон постоянна.

9. Найти меньшую высоту треугольника со сторонами 13 см, 14 см, 15 см.

10. Стороны треугольника равны 25 см, 24 см и 7 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей.

11. Найти площадь треугольника, основание которого равно a, а углы при основании равны 60° и 45°.

12. Найти площадь трапеции, у которой основания 69 см и 20 см, а боковые стороны 13 см и 37 см.

13. В равнобочной трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона 17 м и диагональ 39 м. Найти площадь трапеции.

14. Найти площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 2 см и 4 см, а один из углов 60°.

15. Диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, а ее площадь равна S. Найти высоту трапеции.

16. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Найти его площадь S, если $|AC|=a$, $|BD|=b$.

17. Найти площадь равнобочной трапеции, зная ее диагональ l и угол α между этой диагональю и бóльшим основанием.

Раздел II

18. Найти площадь прямоугольника, если сторона прямоугольника относится к его диагонали как 3:5, и другая сторона равна 8 см.

19. Найти стороны прямоугольника, если отношение одной из его сторон к диагонали равно 3:5, а площадь равна 192 см^2.

20. Найти диагональ прямоугольника, если его периметр равен 14 м, а площадь 12 м^2.

21. Площадь параллелограмма равна 36 см^2, а острый угол 45°. Одна из высот равна 3 см. Найти вторую высоту.

22. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найти отношение площади прямоугольника к площади параллелограмма, если острый угол параллелограмма равен 45°.

23. Найти площадь равнобедренного треугольника, если его периметр равен 50 дм, а основание меньше боковой стороны на 1 дм.

24. Найти площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 313 см, а один из катетов 312 см.

25. Найти сторону ромба, если его диагонали относятся как 3:4, а площадь равна 24 дм^2.

26. Найти основание трапеции, если его площадь равна 144 см^2, а основания относятся как 4:5 и высота равна 16 см.

27. Найти площадь трапеции, если диагонали трапеции равны 20 м и 15 м, а высота ее 12 м.

28. Найти площадь четырехугольника, диагонали которого равны k и l и образуют угол, равный 30°.

Глава XVI. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

§ 1. Правильные многоугольники

Определение. Многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны.

Мы знаем, что в любом выпуклом n-угольнике сумма величин внутренних углов равна $180°(n-2)$ (§ 3 гл. X). Поэтому величина α внутреннего угла правильного выпуклого многоугольника равна

$$\alpha=\frac{180°(n-2)}{n} \quad (n\geqslant 3).$$

Теорема 1. *Если выпуклый многоугольник правильный, то:*
1) *около него можно описать окружность;*
2) *в него можно вписать окружность, причем центры описанной и вписанной окружностей совпадают.*

Доказательство. Пусть A и B две соседние вершины правильного многоугольника (рис. 257). Проведем биссектрисы углов многоугольника из вершин A и B. Они пересекутся, так как $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}<180°$ (α — величина внутреннего угла многоугольника). Точку O пересечения этих биссектрис соединим с остальными вершинами данного многоугольника.

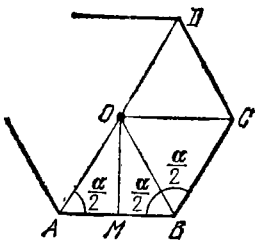


Рис. 257.

Треугольник AOB равнобедренный с основанием AB и углами при основании, равными $\frac{\alpha}{2}$. Треугольники ABO и CBO равны: у них сторона OB общая, стороны AB и BC равны, как стороны правильного многоугольника, а углы при вершине B равны $\frac{\alpha}{2}$. Из равенства треугольников следует, что треугольник OBC равнобедренный с углом при вершине C, равным $\frac{\alpha}{2}$. Значит, CO — биссектриса угла C многоугольника. Затем доказываем, что

треугольник COD равнобедренный и DO — биссектриса угла D многоугольника и т. д.

Вывод: каждый треугольник, у которого одной стороной является сторона данного правильного многоугольника, а противолежащей вершиной точка O, является равнобедренным. Все эти треугольники имеют одинаковые боковые стороны. Отсюда следует, что все вершины правильного многоугольника находятся на окружности с центром O и радиусом, равным боковым сторонам треугольников. Эта окружность описана около данного многоугольника.

Все стороны многоугольника будут касаться окружности с центром O и радиусом, равным высотам треугольников, проведенным из вершины O. Эта окружность вписана в данный многоугольник. Теорема доказана.

Центры вписанной и описанной около правильного многоугольника окружностей — одна и та же точка. Эту точку называют *центром* правильного многоугольника.

Отрезок OM (см. рис. 257) перпендикуляра, проведенного из центра правильного многоугольника к его стороне, называется *апофемой* правильного многоугольника (апофема равна радиусу вписанной окружности); отрезок OA, соединяющий центр правильного многоугольника с его вершиной, равен радиусу описанной окружности.

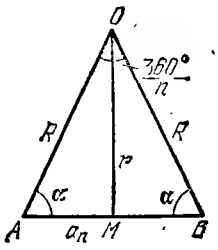


Рис. 258.

Теорема 2. *Площадь правильного выпуклого многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности:*

$$S=\frac{1}{2}Pr, \qquad (1)$$

где P — периметр многоугольника, а r — радиус вписанной в него окружности; площадь правильного n-угольника равна также

$$S=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n}, \qquad (2)$$

где R — радиус описанной окружности.

Доказательство. Разобьем правильный n-угольник на n треугольников, соединяя отрезками вершины n-угольника с центром вписанной окружности (см. рис. 257). Согласно теореме 1 эти треугольники равны. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{2}a_nr$, где a_n — сторона правильного n-угольника (рис. 258).

Площадь S многоугольника равна $\frac{1}{2}a_nrn$, но $a_nn=P$. Следовательно, $S=\frac{1}{2}Pr$, и формула (1) доказана.

По следствию из теоремы 3 § 2 гл. XV

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\widehat{AOB}.$$

Но $|OA|=|OB|=R$, $\widehat{AOB}=\frac{360^\circ}{n}$. Поэтому

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

Следовательно, площадь S многоугольника равна

$$S=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n},$$

и формула (2) доказана.

Сторона a_n правильного n-угольника находится по формуле

$$a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \qquad (3)$$

где R—радиус описанной около этого n-угольника окружности.

Действительно, пусть AB—сторона правильного n-угольника, R—радиус описанной окружности и $OM\perp AB$ (см. рис. 258). Тогда

$$\widehat{AOM}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n}.$$

Из прямоугольного треугольника AOM

$$|AM|=|AO|\sin\widehat{AOM}=R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно, $|AB|=2|AM|=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, и формула (3) доказана.

Из формулы (3) следует

$$a_3=2R\sin 60^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3},$$

$$a_4=2R\sin 45^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=R\sqrt{2},$$

$$a_6=2R\sin 30^\circ=2R\cdot\frac{1}{2}=R.$$

§ 2. Длина окружности

Мы не станем проводить строгого определения длины окружности, так как оно основано на понятии предела числовой последовательности, которое изучается в 9 классе.

Из наглядных соображений естественно считать, что длина окружности сколь угодно мало отличается от периметра вписанного в нее выпуклого многоугольника с достаточно малыми сторонами. Исходя из этого предположения, докажем некоторые свойства длины окружности.

Теорема. *Длины двух окружностей относятся как их радиусы или диаметры.*

Доказательство. Пусть R_1 и R_2—радиусы двух окружностей, а C_1 и C_2—длины окружностей. Впишем в эти окружности правильные выпуклые многоугольники с достаточно большим числом сторон n.

Найдем периметры многоугольников P_1 и P_2. По формуле (3) § 1 имеем

$$P_1 = 2R_1 \sin\frac{180^\circ}{n} \cdot n; \quad P_2 = 2R_2 \sin\frac{180^\circ}{n} \cdot n.$$

Следовательно,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Если n достаточно велико, то из формулы (3) § 1 следует, что сторона a_n правильного многоугольника будет достаточно малой, и значит, по предположению, периметр P_1 сколь угодно мало отличается от C_1, а периметр P_2 от C_2. Поэтому отношение $\frac{P_1}{P_2}$, равное $\frac{R_1}{R_2}$, сколь угодно мало отличается от $\frac{C_1}{C_2}$.

Но R_1/R_2 и C_1/C_2—вполне определенные числа. Если они отличаются сколь угодно мало, то они равны. Поэтому

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1}{D_2}, \tag{4}$$

где D_1 и D_2—диаметры окружностей. Теорема доказана.

Из равенств (4) следует, что

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2},$$

т. е. отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности. Это отношение принято обозначать буквой π (читается «пи»). Число π—иррациональное, $\pi \approx 3{,}1416$. Итак, длина окружности вычисляется по формуле

$$C = \pi D = 2\pi R. \tag{5}$$

Найдем длину дуги окружности, отвечающей центральному углу в n°. Развернутому углу соответствует полуокружность, а ее длина равна πR. Следовательно, углу в один градус соответствует дуга длиной $\frac{\pi R}{180}$, а углу в n° соответствует дуга длиной

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ. \tag{6}$$

Число π можно найти с любой наперед заданной точностью, исходя из следующего допущения: длина окружности больше периметра любого вписанного в нее многоугольника и меньше периметра любого описанного около нее многоугольника.

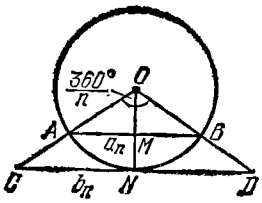


Рис. 259.

Рассмотрим окружность диаметра $D = 1$. Ее длина равна π. Обозначим периметр вписанного в такую окружность правильного n-угольника через p_n, а периметр описанного—через q_n. Тогда по сделанному допущению

$$p_n < \pi < q_n. \tag{7}$$

Пусть $a_n = |AB|$—сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 259). Через $b_n = |CD|$ обозна-

чим сторону правильного n-угольника, описанного около этой окружности.

Из треугольников AOM и CON находим

$$|AM| = \frac{a_n}{2} = R\sin\frac{180^\circ}{n}, \quad |CN| = \frac{b_n}{2} = R\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

т. е.

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \; b_n = 2R\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}. \tag{8}$$

Если $D = 2R = 1$, то

$$a_n = \sin\frac{180^\circ}{n}, \quad b_n = \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{na_n}{nb_n} = \frac{a_n}{b_n} = \cos\frac{180^\circ}{n},$$

или

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{1-a_n^2}, \tag{9}$$

так как $\cos\frac{180^\circ}{n} = \sqrt{1-\sin^2\frac{180^\circ}{n}} = \sqrt{1-a_n^2}$.

Увеличивая n, можно сделать a_n сколь угодно малым, а корень $\sqrt{1-a_n^2}$ сколь угодно близким к единице.

Неравенства (7) и (9) означают, что при помощи неравенств $p_n < \pi < q_n$ число π оценивается при достаточно большом n со сколь угодно большой точностью.

Например, при $n = 12$ получим

$$a_{12} = \sin 15^\circ, \quad b_{12} = \operatorname{tg} 15^\circ,$$

следовательно,

$$12\sin 15^\circ < \pi < 12\operatorname{tg} 15^\circ.$$

Из таблиц значений тригонометрических функций находим $\sin 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 15^\circ$. Тогда

$$3{,}10595 < \pi < 3{,}21554.$$

Точно так же, принимая $n = 96$, получили бы

$$3{,}14134 < \pi < 3{,}14284,$$

т. е. оценили бы число π с довольно большой точностью.

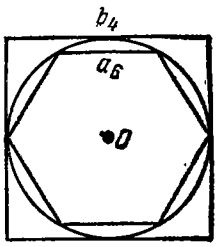


Рис. 260.

Задача. Доказать, что $3 < \pi < 4$.

Решение. В окружность диаметра $D = 1$ впишем правильный шестиугольник и опишем около окружности квадрат (рис. 260). Тогда по формуле (8) $a_6 = R = \frac{1}{2}$, $b_4 = 2R = 1$, следовательно, $6a_6 < \pi < 4b_4$ или $3 < \pi < 4$.

§ 3. Площадь круга

Строгое определение площади круга основано на понятии предела числовой последовательности. Из наглядных соображений будем считать, что площадь круга сколь угодно мало отличается от площади вписанного в нее выпуклого многоугольника с достаточно малыми сторонами.

Пусть R — радиус круга, а C — длина его окружности. Впишем в окружность правильный выпуклый многоугольник с достаточно большим числом n. Площадь этого многоугольника

$$S_n = \frac{1}{2}Pr, \tag{10}$$

где P — периметр многоугольника, а r — радиус вписанной в него окружности (формула (1) § 1). При возрастании числа его сторон n периметр P сколь угодно мало отличается от числа C, а радиус r — от числа R. Говорят, что при возрастании n периметр P стремится к длине окружности, а площадь S_n — к площади круга S. Поэтому

$$S = \frac{1}{2}CR = \frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R = \pi R^2.$$

Итак, площадь круга вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2, \tag{11}$$

где R — радиус круга.

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла (рис. 261).

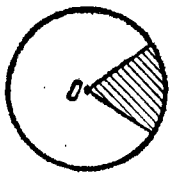


Рис. 261.

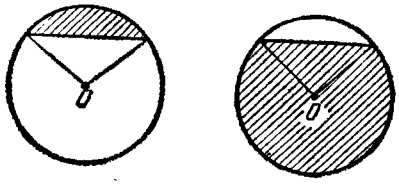


Рис. 262.

Площадь сектора, дуга которого содержит один градус, равна $\frac{1}{360}$ площади круга. Поэтому площадь сектора, дуга которого содержит α градусов, равна $\frac{\pi R^2}{360}\alpha$. Итак, площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha, \tag{12}$$

где R — радиус круга, α — градусная мера соответствующего центрального угла.

Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости (рис. 262). Площадь сегмента, не равного полукругу,

вычисляется по формуле

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha\pm S_{\triangle}, \qquad (13)$$

где $S_{\triangle}$—площадь треугольника с вершинами в центре круга и на концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. В формуле (13) знак минус надо брать в случае, если $\alpha<180°$, и знак плюс—в случае, если $\alpha>180°$.

Упражнения

Раздел I

1. При каких значениях n сторона правильного n-угольника: а) больше радиуса описанной окружности; б) равна радиусу описанной окружности; в) меньше радиуса описанной окружности?

2. В окружность радиуса R вписаны и около нее описаны правильные n-угольники. Найти отношение: а) их периметров; б) их площадей для $n=3, 4, 6$.

3. Сторона квадрата равна a. Найти длину окружности: а) вписанной в него; б) описанной около него.

4. По данной хорде a найти длину дуги, если центральный угол: а) 60°; б) 90°; в) 120°.

5. Найти площадь той части круга, которая расположена вне вписанного квадрата. Радиус круга равен R.

6. Угловая величина дуги сегмента равна 120°, а длина этой дуги l. Найти длину окружности, вписанной в этот сегмент.

7. Найти площадь кругового сегмента с основанием $a\sqrt{3}$ и высотой $\frac{a}{2}$.

Раздел II

8. Окружность радиуса 2 см разогнута в дугу радиуса 5 см. Найти градусную меру центрального угла.

9. Площадь круга, радиус которого равен 5,4 дм, разделена двумя концентрическими окружностями на три части, площади которых относятся как 4 : 3 : 2. Найти радиусы этих концентрических окружностей.

10. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник, в который вписан круг, а в этот круг вписан квадрат. Найти сторону этого квадрата.

11. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если сумма всех его внутренних углов равна:
а) 1080°; б) 1620°; в) 22 d?

12. Углы выпуклого пятиугольника относятся как 1 : 3 : 4 : 4 : 6. Найти их.

Глава XVII. ЗАДАЧИ

Рассмотрим примеры решения некоторых геометрических задач. Решение этих задач, различных по трудности, требует комбинированного применения основных теорем и формул геометрии на плоскости (планиметрии).

Задача 1. Две окружности пересекаются под прямым углом (т. е. их касательные, проведенные в одной из точек пересечения, взаимно перпендикулярны). Найти длину отрезка общей касательной к этим окружностям, если их радиусы равны R и r.

Решение. Пусть O_1 и O_2—центры данных окружностей, M—одна из точек их пересечения, AB—общая касательная (рис. 263). Из условия пересечения окружностей под прямым углом следует, что $O_1M \perp O_2M$. Поэтому $|O_1O_2| = \sqrt{R^2+r^2}$.

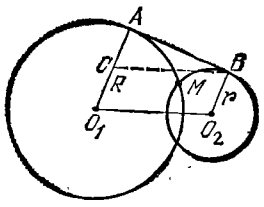


Рис. 263

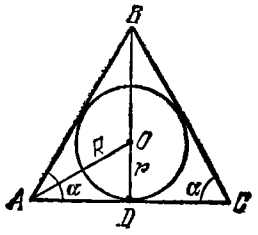


Рис. 264.

Допустим, что $R > r$. Проведем $BC \parallel O_1O_2$ и рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$ (угол A—прямой). По теореме Пифагора

$$|AB| = \sqrt{|BC|^2 - |AC|^2} = \sqrt{R^2+r^2-(R-r)^2} = \sqrt{2Rr}.$$

Если $R = r$, то $|AB| = |O_1O_2| = R\sqrt{2}$, и результат содержится в ранее найденном при $R = r$. Итак, $|AB| = \sqrt{2Rr}$.

Задача 2. Найти отношение радиусов вписанного и описанного кругов для равнобедренного треугольника с углом α при основании.

Решение. Пусть ABC—равнобедренный треугольник, $\hat{A} = \hat{C} = \alpha$ (рис. 264). Обозначим $|AC| = b$. По теореме синусов

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R,$$

где R—радиус описанного круга.

Так как угол при основании равен α, то

$$\hat{B} = 180° - 2\alpha, \quad \sin \hat{B} = \sin(180° - 2\alpha) = \sin 2\alpha.$$

Значит,

$$R = \frac{b}{2 \sin 2\alpha}.$$

Пусть O—центр вписанного круга. Тогда $\widehat{OAD} = \frac{\alpha}{2}$, поэтому

$$r = |OD| = |AD| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{r}{R}=\sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 3. В треугольнике ABC даны стороны a, b и c. Найти его медианы m_a, m_b и m_c (рис. 265).

Решение. 1-й способ. Для вычисления медианы $m_b=|BB_1|$ продолжим ее на отрезок B_1D, равный BB_1, и соединим точку D с вершинами A и C. Полученный четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как диагонали AC и BD делятся в точке

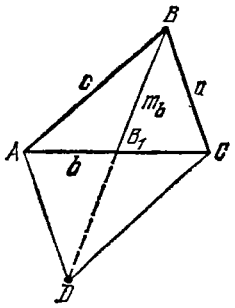


Рис. 265.

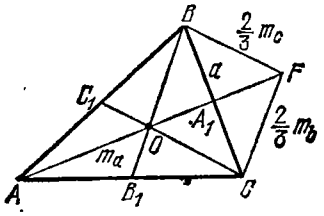


Рис. 266.

пересечения. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, т. е. $b^2+(2m_b)^2=2a^2+2c^2$, откуда $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$. Аналогично вычисляются m_a и m_c.

2-й способ. Пусть $\widehat{AB_1B}=\alpha$. Тогда $\widehat{BB_1C}=180°-\alpha$. По теореме косинусов

$$c^2=\frac{b^2}{4}+m_b^2-2m_b\cdot\frac{b}{2}\cos\alpha,$$

$$a^2=\frac{b^2}{4}+m_b^2-2m_b\cdot\frac{b}{2}\cos(180°-\alpha).$$

Сложив эти равенства и учитывая, что $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, находим m_b.

Задача 4. В треугольнике ABC даны медианы m_a, m_b и m_c. Найти его стороны a, b и c (рис. 266).

Решение. Для вычисления стороны a продолжим отрезок AA_1 на расстояние $|A_1F|=\frac{m_a}{3}$ и точку F соединим с вершинами B и C. Пусть O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Четырехугольник $OBFC$ — параллелограмм. По свойству диагоналей параллелограмма

$$a^2+\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2=2\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+2\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2,$$

откуда следует, что

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}.$$

Аналогично находим b и c.

Задача 5. Доказать, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению двух прилежащих сторон треугольника без произведения отрезков, на которые она делит противолежащую сторону (рис. 267), т. е. $l_c^2 = ab - a_1 b_1$.

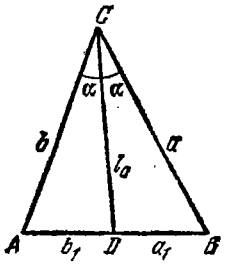


Рис. 267.

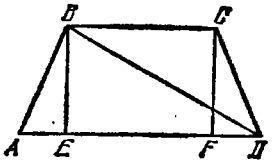


Рис. 268.

Решение. Рассмотрим треугольники ACD и BCD. По теореме косинусов

$$b_1^2 = b^2 + l_c^2 - 2bl_c \cos\alpha, \quad a_1^2 = a^2 + l_c^2 - 2al_c \cos\alpha,$$

где $\alpha = \frac{\hat{C}}{2}$. Отсюда следует, что

$$\frac{2bl_c \cos\alpha}{2al_c \cos\alpha} = \frac{b^2 + l_c^2 - b_1^2}{a^2 + l_c^2 - a_1^2},$$

т. е.

$$l_c^2 (b - a) = ab (b - a) - (ab_1^2 - a_1^2 b). \qquad (*)$$

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}, \text{ т. е. } ab_1 = a_1 b.$$

Тогда $ab_1^2 - a_1^2 b = a_1 b b_1 - a_1 b_1 a = a_1 b_1 (b - a)$ и равенство $(*)$ принимает вид

$$l_c^2 (b - a) = ab (b - a) - a_1 b_1 (b - a),$$

или $l_c^2 = ab - a_1 b_1$ при условии, что $b \neq a$.

Если $b = a$, то $b_1 = a_1 = \frac{c}{2}$, $l_c^2 = a^2 - \frac{c^2}{4}$, что согласуется с доказываемым равенством, положив в нем $a = b$.

Задача 6. Основания трапеции равны 4 м и 16 м (рис. 268). Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

Решение. Описать окружность около трапеции можно только при условии, что трапеция является равнобочной: $AB = CD$. Вписать окружность в трапецию $ABCD$ можно только при условии, что $AB + CD = BC + AD$. Пусть $|BC| = 4$ м, $|AD| = 16$ м. Тогда $|AB| = |CD| = 10$ м, $|AE| = |FD| = \frac{16-4}{2} = 6$ м, $|BE| = \sqrt{|AB|^2 - |AE|^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ м, $|BD| = \sqrt{|BE|^2 + |DE|^2} = \sqrt{64 + 100} = 2\sqrt{41}$ м. Тогда $2r = |BE| = 8$ м, т. е. радиус вписанной окружности $r = 4$ м.

Найдем площадь S треугольника ABD:

$$S=\frac{1}{2}|BE|\cdot|AD|=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 16=64 \text{ м}^2.$$

Используем формулу для радиуса окружности, описанной около треугольника: $R=\frac{abc}{4S}$.

Для треугольника ABD получим

$$R=\frac{16\cdot 10\cdot 2\sqrt{41}}{4\cdot 64}=\frac{5}{4}\sqrt{41} \text{ м}.$$

Радиус окружности, описанной около $\triangle ABD$, и есть радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$.

Задача 7. В окружности радиуса 5 м проведены хорды, длина которых равна 8 м. Найти геометрическое место середин этих хорд.

Решение. Рассмотрим множество точек, которые являются серединами хорд длиной 8 м в данной окружности. Возьмем какую-нибудь хорду AB ($|AB|=8$ м) с серединой в точке M (рис. 269). По теореме Пифагора $|OM|=\sqrt{25-16}=3$ м. Значит, все такие точки и только они

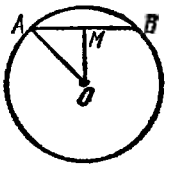


Рис. 269.

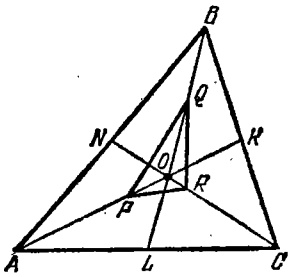


Рис. 270.

удалены от центра данной окружности на расстояние в 3 м. Искомое геометрическое место точек представляет собой окружность радиусом 3 м и центром O.

Задача 8. Дан треугольник ABC, площадь которого равна единице (рис. 270). На медианах AK, BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q и R так, что

$$\frac{AP}{PK}=1,\ \frac{BQ}{QL}=\frac{1}{2},\ \frac{CR}{RN}=\frac{5}{4}.$$

Найти площадь треугольника PQR.

Решение. Пусть O—точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Тогда $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}=S_{\triangle AOC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}$ (см. задачу 2 § 2 гл. XV).

Рассмотрим $\triangle POQ$:

$$|OP|=\frac{2}{3}|AK|-\frac{1}{2}|AK|=\frac{1}{6}|AK|,$$

$$|OQ|=\frac{2}{3}|BL|-\frac{1}{3}|BL|=\frac{1}{3}|BL|.$$

Так как

$$S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}|OP|\cdot|OQ|\sin\widehat{POQ},$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\widehat{AOB},$$

то

$$\frac{S_{\triangle POQ}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{|OP|\cdot|OQ|}{|OA|\cdot|OB|}=\frac{|OP|}{|OA|}\cdot\frac{|OQ|}{|OB|}=\frac{\frac{1}{6}|AK|}{\frac{2}{3}|AK|}\cdot\frac{\frac{1}{3}|BL|}{\frac{2}{3}|BL|},$$

следовательно,

$$S_{\triangle POQ}=\frac{1}{8}S_{\triangle AOB}.$$

Аналогично получаем, что

$$S_{\triangle QOR}=\frac{1}{12}S_{\triangle BOC},\quad S_{\triangle POR}=\frac{1}{24}S_{\triangle AOC}.$$

Поэтому

$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{12}.$$

Задача 9. Доказать, что множество всех точек M, для которых

$$|MA^2-MB^2|=kS_{\triangle MAB},$$

где A и B—данные две точки, $k>0$—данная постоянная, S_{MAB}—площадь треугольника MAB, есть пара прямых.

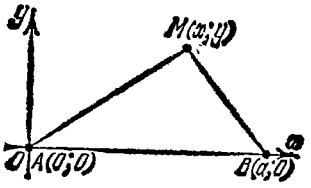


Рис. 271.

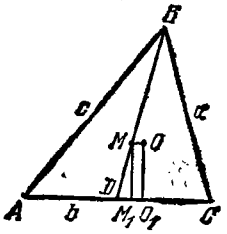


Рис. 272.

Решение. Применим метод координат. Пусть $|AB|=a$. Выберем систему координат (рис. 271). Тогда $A(0;0)$, $B(a;0)$, $M(x;y)$. Поэтому

$$MA^2=x^2+y^2,\quad MB^2=(x-a)^2+y^2;$$

следовательно,

$$MA^2-MB^2=2ax-a^2;\quad |MA^2-MB^2|=a|2x-a|.$$

Высота $\triangle MAB$ равна модулю ординаты точки M, а основание треугольника равно a. Поэтому

$$S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}a|y|.$$

По условию

$$a|2x-a|=\frac{1}{2}a|y|, \text{ или } |2x-a|=\frac{1}{2}|y|,$$

откуда

$$2x-a=\frac{1}{2}y, \quad 2x-a=-\frac{1}{2}y$$

— уравнения двух прямых.

Задача 10. Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника.

Решение. Пусть a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$, причем $a<b<c$; O — центр вписанной окружности, M — точка пересечения медиан (рис. 272). Так как a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то $b-a=c-b$ или $a+c=2b$. Поэтому периметр $\triangle ABC$

$$2p=3b \quad \text{или} \quad p=\frac{3}{2}b.$$

Для решения задачи покажем, что точки O и M находятся на равных расстояниях от стороны AC. Имеем

$$|OO_1|=r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{3b}$$

(r — радиус вписанной окружности, S — площадь треугольника, p — его полупериметр). Находим

$$|MM_1|=\frac{1}{3}h_b \ (h_b \text{ — высота } \triangle ABC),$$

так как $|MM_1|=\frac{1}{3}|BD|$. Поэтому

$$|MM_1|=\frac{1}{3}h_b=\frac{1}{3}\cdot\frac{2S}{b}=\frac{2S}{3b}.$$

Следовательно, $|OO_1|=|MM_1|$, и прямая OM параллельна стороне AC.

Задача 11. В данный треугольник вписать прямоугольник, имеющий заданную диагональ, так, что две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на его боковых сторонах.

Решение. Допустим сначала, что ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C (рис. 273, a). Тогда из вершины C раствором циркуля, равным длине данной диагонали, строим точку D на гипотенузе AB. Получим прямоугольник $DECF$ с данной диагональю CD. Пусть h — высота, проведенная из вершины C на гипотенузу. Если $|CD|=h$, то задача имеет единственное решение; если $|CD|>h$, то решения два; а если $|CD|<h$, то решения нет.

Пусть ABC — произвольный треугольник (рис. 273, *б*). Рассмотрим вспомогательный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 такой, что $|A_1C_1|=|AC|$, а $|B_1C_1|=|BH|$ (BH — высота $\triangle ABC$).

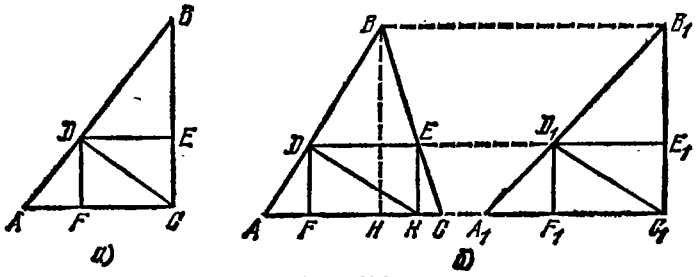


Рис. 273.

Впишем в треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольник $D_1E_1C_1F_1$ с заданной диагональю. Тогда $DEKF$ — искомый прямоугольник. В самом деле, $|DF|=|D_1F_1|$, а из равенства

$$\frac{|DE|}{|AC|}=\frac{|D_1E_1|}{|A_1C_1|},$$

следует, что $|DE|=|D_1E_1|$, так как $|AC|=|A_1C_1|$. Поэтому $|KD|=|C_1D_1|$.

Упражнения

1. Доказать, что: а) треугольник с двумя равными медианами является равнобедренным; б) треугольник с двумя равными высотами является равнобедренным.

2. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см. Найти длины катетов треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной в 5 см и 12 см. Найти длины катетов.

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов равен α. Определить радиус вписанного круга.

5. Определить синусы острых углов прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного круга как 5:2.

6. Доказать, что в треугольнике ABC, длины сторон которого $|AB|=4$ см, $|BC|=3$ см и $|AC|=\sqrt{5}$ см, медианы AK и CL взаимно перпендикулярны.

7. В треугольнике ABC площадью 1 кв. ед. на медиане BK взята точка M так, что $|MK|=\frac{1}{4}|BK|$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке L. Найти площадь треугольника ALC.

8. Даны две концентрические окружности. Касательная к окружности меньшего радиуса делит длину окружности большего радиуса в отношении 1:5. Найти отношение площадей кругов, ограниченных этими окружностями.

9. В четырехугольник, три последовательные стороны которого равны соответственно 2, 3 и 4, вписана окружность радиуса 1,2. Найти площадь этого четырехугольника.

10. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание в полтора раза меньше радиуса описанной окружности. Найти отношение основания к боковой стороне.

11. В равнобочной трапеции $ABCD$: $|AB|=|CD|=3$, основание $|AD|=7$, $\widehat{BAD}=60°$. На диагонали BD расположена точка M так, что $|BM|:|MD|=3:5$. Какую из сторон трапеции BC или CD пересечет продолжение отрезка AM?

12. Около круга радиусом r описана прямоугольная трапеция, наименьшая из сторон которой равна $\frac{3}{2}r$. Найти площадь трапеции.

13. Около равнобочной трапеции, основания которой 6 см и 8 см, а высота 7 см, описан круг. Найти площадь этого круга.

14. Большее основание трапеции равно a, меньшее основание равно b; углы при большем основании 30° и 45°. Найти площадь трапеции.

15. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Определить основание треугольника и радиус описанного круга.

16. Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон постоянна.

17. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 3 м и 6 м. Найти длину биссектрисы прямого угла.

18. В прямоугольном треугольнике биссектриса угла делит противолежащий катет на отрезки длиной 4 см и 5 см. Найти площадь треугольника.

19. Около треугольника с данными углами α, β, γ описан круг. Найти отношение площади треугольника к площади круга.

20. Из точки A данной окружности проведены всевозможные хорды. Что представляет собой геометрическое место их середин?

21. Построить правильный треугольник, вершины которого лежат на трех данных прямых.

Глава XVIII. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. Аксиомы стереометрии

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. Свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем. При этом отправными являются свойства простейших геометрических фигур, выражаемые аксиомами. Простейшими фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость.

Аксиомы стереометрии состоят из аксиом планиметрии и следующих аксиом, выражающих основные свойства плоскостей в пространстве.

1) *Для любой плоскости существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.*

2) *Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

3) *Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость и притом только одну.*

Из аксиом стереометрии следует, что:

1) *через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну;*

2) *если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости;*

3) *плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке;*

4) *через три точки, не лежащие на прямой, можно провести плоскость и притом только одну.*

§ 2. Прямые и плоскости в пространстве

Две различные прямые в пространстве либо лежат в одной плоскости и имеют только одну общую точку, либо лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, либо лежат в разных плоскостях.

Определение. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Определение. Две прямые в пространстве называются *скрещивающимися*, если они лежат в разных плоскостях.

Итак, две прямые в пространстве либо пересекаются, либо параллельны, либо скрещиваются.

Углом между скрещивающимися прямыми будем называть угол между пересекающимися прямыми, им параллельными. Его угловую меру α выбирают в границах $0 < \alpha \leqslant 90°$; она не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые.

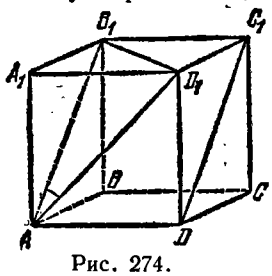


Рис. 274.

Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Задача 1. Найти угол между диагоналями смежных граней куба, проведенными из разных вершин.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб (рис. 274).

Найдем угол между диагоналями граней AD_1 и C_1D, как угол между скрещивающимися прямыми. Проведем AB_1 параллельно C_1D; угол B_1AD_1 искомый. Соединив B_1 и D_1, получим равносторонний треугольник AB_1D_1. Следовательно, $\widehat{B_1AD_1} = 60°$.

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной к плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

При этом, если данная прямая и какая-нибудь прямая данной плоскости скрещиваются, то они считаются перпендикулярными, когда угол между ними равен 90°.

Теорема 1 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.*

Доказательства этой теоремы и следующих теорем в § 2 не приводим.

Теорема 2 (признак параллельности прямой и плоскости). *Плоскость и не лежащая в ней прямая параллельны, если в данной плоскости найдется прямая, параллельная данной прямой.*

Теорема 3 (признак параллельности двух плоскостей). *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

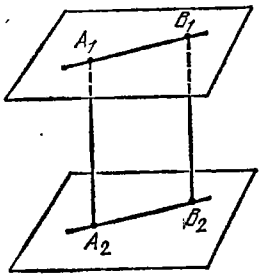


Рис. 275.

Из теорем 1—3 следует, что:

1) *через любую точку пространства проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная данной плоскости; две прямые, перпендикулярные данной плоскости, параллельны;*

2) *через каждую точку пространства проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная данной прямой; две плоскости, перпендикулярные данной прямой, параллельны;*

3) *через точку вне плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну;*

4) *если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны;*

5) *отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны:* $|A_1A_2|=|B_1B_2|$ (рис. 275).

Длина отрезка, отсекаемого двумя параллельными плоскостями на любом их общем перпендикуляре, называется *расстоянием между этими плоскостями.*

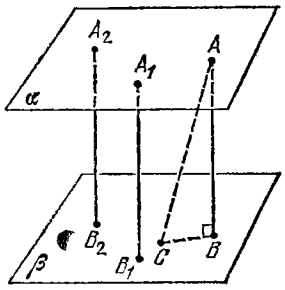


Рис. 276.

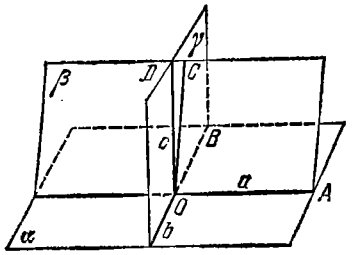


Рис. 277.

Например, если плоскости α и β параллельны, то расстояние между ними есть $|AB|=|A_1B_1|=|A_2B_2|$ (рис. 276). На этом рисунке AB — перпендикуляр, опущенный из точки A плоскости α

на плоскость β, AC — наклонная, BC — проекция наклонной на плоскость β; $|AC| > |AB|$.

Задача 2. Построить три взаимно перпендикулярные прямые.

Решение. Возьмем произвольную плоскость α. Проведем на ней две перпендикулярные прямые a и b (рис. 277), затем через прямую OA проведем плоскость β и на этой плоскости построим прямую OC, перпендикулярную к OA. Через прямые OB и OC проведем плоскость γ и построим в этой плоскости прямую OD,

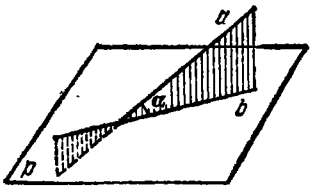


Рис. 278.

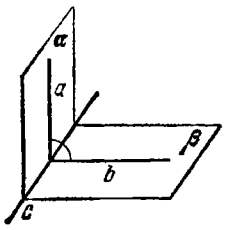


Рис. 279.

перпендикулярную к OB. Так как $OA \perp OB$ и $OA \perp OC$, то, согласно теореме 1, прямая OA перпендикулярна к плоскости γ, и, следовательно, $OA \perp OD$. Значит, прямые a, b и c взаимно перпендикулярны.

Определим понятие угла между прямой и плоскостью. Пусть p — плоскость и a — пересекающая ее прямая (рис. 278). Основания перпендикуляров, опущенных из точек a на плоскость p, лежат на прямой b. Эта прямая называется *проекцией* прямой a на плоскость p. *Углом между прямой a и плоскостью p* называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость p. Его угловую меру α выбирают в границах $0° < \alpha \leqslant 90°$. Если прямая параллельна плоскости, то угол между ними считается равным нулю.

Определим понятие угла между плоскостями. Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю. Пусть α и β — плоскости, пересекающиеся по прямой c (рис. 279). Проведем плоскость γ, перпендикулярную к прямой c. Она пересечет плоскости α и β по прямым a и b. *Углом между плоскостями α и β* называется угол между прямыми a и b. Этот угол не зависит от выбора плоскости γ.

§ 3. Многогранники (прямая призма, прямоугольный параллелепипед, пирамида, правильная пирамида)

Определение. *Многогранником* называется геометрическое тело, ограниченное пополненными многоугольниками (см. гл. XV).

Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника.

Будем рассматривать простейшие многогранники — прямые призмы и пирамиды.

Прямая призма. Пусть α и α_1 — две параллельные плоскости, Q — выпуклый многоугольник в плоскости α и A, B, C, ..., K — его вершины. Через каждую точку M многоугольника Q проведем прямую, перпендикулярную плоскости α, и обозначим через M_1 точку пересечения ее с плоскостью α_1 (рис. 280). Отрезки MM_1 заполняют некоторый многогранник. Этот многогранник

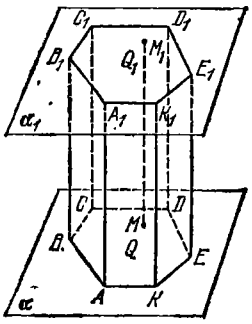


Рис. 280.

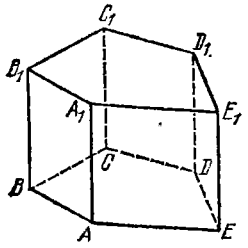


Рис. 281.

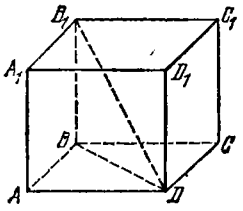


Рис. 282.

называется *прямой призмой*. Его граница состоит из многоугольника Q, равного ему многоугольника Q_1 в плоскости α_1 и прямоугольников ABB_1A_1, BCC_1B_1, ... Многоугольники Q и Q_1 называются *основаниями* призмы, а прямоугольники — *боковыми гранями* прямой призмы. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, ..., KK_1 называются *боковыми ребрами* призмы. *Высотой* призмы называется отрезок, заключенный между ее основаниями и перпендикулярный им. (Высотой призмы называют и длину этого отрезка.) На рис. 281 изображена прямая пятиугольная призма.

Прямая призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется *прямым параллелепипедом*. Если же в основании прямой призмы лежит прямоугольник, то она называется *прямоугольным параллелепипедом* (рис. 282). Прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны между собой, называется *кубом*. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, называют *измерениями* этого параллелепипеда.

Площадь боковой поверхности прямой призмы есть сумма площадей прямоугольников, являющихся ее боковыми гранями.

Теорема 1. *Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на ее высоту.*

Доказательство. Обозначим через h высоту призмы и через a, b, ..., f — стороны основания. Так как боковые грани прямой призмы — прямоугольники с высотой h и сторонами a, b, ..., f, то площадь боковой поверхности прямой призмы

$$S_{\text{бок}} = ah + bh + \ldots + fh = (a + b + \ldots + f)\,h = Ph, \qquad (1)$$

где P — периметр основания призмы. Теорема доказана.

Площадь поверхности (или площадь полной поверхности) прямой призмы состоит из площади боковой поверхности и площадей оснований. Поэтому

$$S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}. \tag{2}$$

Диагональю параллелепипеда называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани. У параллелепипеда четыре диагонали.

Теорема 2. *В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.*

Доказательство. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$—данный прямоугольный параллелепипед (см. рис. 282). Проведем его диагональ B_1D. Из прямоугольного треугольника B_1DB по теореме Пифагора получаем $B_1D^2 = BD^2 + BB_1^2$.

Из прямоугольного треугольника BAD по теореме Пифагора получаем $BD^2 = AB^2 + AD^2$. Отсюда $B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$, так как $AA_1 = BB_1$. Теорема доказана.

Следствие. *В прямоугольном параллелепипеде все четыре диагонали равны между собой.*

Если a—длина ребра куба, а l—длина его диагонали, то $l^2 = 3a^2$ или $l = a\sqrt{3}$. Для многогранников и других геометрических тел понятие объема вводится аналогично понятию площади плоской фигуры (гл. XV). Единицей измерения объема будем считать куб, длина ребра которого принята за единицу измерения длины. Объем куба с длиной ребра a равен кубу длины его ребра: $V = a^3$. Общие свойства объемов тел аналогичны общим свойствам площадей плоских фигур (гл. XV).

Две фигуры в пространстве называются *равными*, если они совмещаются движением. Движение в пространстве рассматривается так же, как и на плоскости (гл. XIII). Это преобразование для фигур в пространстве, которое сохраняет расстояние между точками. Равные фигуры в пространстве имеют равные объемы.

Фигуры, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*. Равные фигуры всегда равновелики. Обратное неверно: если две фигуры имеют равные объемы, то они не обязательно равны.

Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле

$$V = abc, \tag{3}$$

где a, b и c—три измерения параллелепипеда (длина, ширина и высота). Формулу (3) можно записать в виде

$$V = Sh \tag{4}$$

($S = ab$—площадь основания, h—высота призмы). Формула (4) верна для любой прямой призмы. Итак, *объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.*

Пирамида. Пусть Q—выпуклый многоугольник в плоскости α и S—точка, не принадлежащая плоскости α. Соединим каждую точку M многоугольника Q с точкой S отрезком MS. Отрезки MS

заполняют некоторый многогранник. Этот многогранник называется *пирамидой* (рис. 283).

Пирамида называется n-угольной, если Q—n-угольник. Треугольная пирамида называется также тетраэдром. Многоугольник Q называется *основанием* пирамиды, а точка S—*вершиной* пирамиды. *Высотой* пирамиды называется отрезок перпендикуляра, проведенного через вершину к плоскости ее основания; концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра. (Высотой пирамиды называют и длину этого отрезка.) Пусть A, B, C, ..., K—вершины многоугольника Q, лежащего в основании пирамиды. Тогда треугольники ASB, BSC, ... называются *боковыми гранями* пирамиды, а отрезки AS, BS, CS, ...— *боковыми ребрами*.

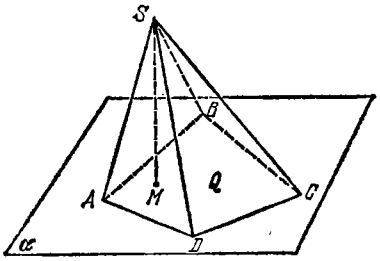


Рис. 283.

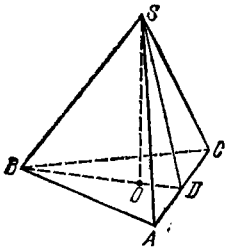


Рис. 284.

Пирамида называется *правильной*, если основанием ее является правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр основания. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины пирамиды, называется *апофемой* пирамиды. Все апофемы правильной пирамиды равны между собой.

На рис. 284 изображена правильная треугольная пирамида.

Теорема 3. *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.*

Доказательство. Площадь одной боковой грани правильной n-угольной пирамиды равна $\frac{1}{2}ah_{\text{бок}}$, где a—сторона основания, $h_{\text{бок}}$—апофема пирамиды. Поэтому

$$S_{\text{бок}}=\frac{ah_{\text{бок}}}{2}\cdot n=\frac{an}{2}\cdot h_{\text{бок}}=\frac{P}{2}h_{\text{бок}},$$

где P—периметр основания пирамиды.

Итак,

$$S_{\text{бок}}=\frac{1}{2}Ph_{\text{бок}}. \qquad (5)$$

Теорема доказана.

Площадь поверхности (или площадь полной поверхности) правильной пирамиды состоит из площади боковой поверхности и площади основания. Поэтому $S=S_{\text{бок}}+S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}Ph_{\text{бок}}+\frac{1}{2}Ph_{\text{осн}}$,

или

$$S=\frac{1}{2}P(h_{бок}+h_{осн}). \qquad (6)$$

Объем любой пирамиды вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}h, \qquad (7)$$

где $S_{осн}$ — площадь основания пирамиды, h — высота пирамиды.

Задача. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро и сторона основания равны a. Найти площадь поверхности пирамиды.

Решение. Пусть $SABC$ — данная пирамида, $|AS|=|AB|=a$ (см. рис. 284). Тогда

$$h_{осн}=|BD|=a\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2};\quad S_{осн}=\frac{1}{2}ah_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Треугольники ASB, BSC, CSA равны треугольнику ABC. Поэтому $S=4S_{осн}=a^2\sqrt{3}$.

§ 4. Фигуры вращения (цилиндр, конус, шар)

Цилиндр. Пусть α и α_1 — две параллельные плоскости, P — круг в плоскости α (рис. 285). Приведем через произвольную точку M круга P прямую, перпендикулярную к плоскости α. Отрезок этой прямой между плоскостями α и α_1 обозначим через a_M. Когда точка M описывает круг P, отрезки a_M заполняют некоторое тело. Это тело называется *круговым цилиндром* или просто *цилиндром*.

Граница цилиндра состоит из круга P, равного ему круга P_1 в плоскости α_1 и боковой поверхности. Боковая поверхность цилиндра описывается отрезком a_M, когда точка M пробегает окружность круга P. При этом сами отрезки a_M называются *образующими* цилиндра. Круги P и P_1 называются *основаниями* цилиндра.

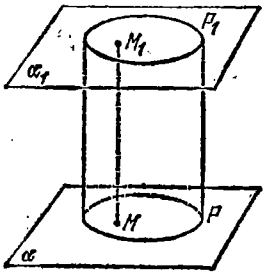


Рис. 285.

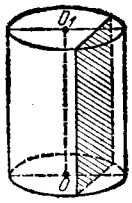


Рис. 286.

Высотой цилиндра называется отрезок, заключенный между его основаниями и перпендикулярный им. (Высотой цилиндра называют и длину этого отрезка.)

Прямая, проходящая через центр основания цилиндра параллельно его образующим, называется *осью* цилиндра.

В сечении оснований и боковой поверхности цилиндра плоскостью, параллельной образующим, получается прямоугольник, сторонами которого служат образующие цилиндра и хорды (в частности, диаметры) окружностей оснований (рис. 286).

Круговой цилиндр можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг одной из его сторон — оси вращения (рис. 287, *а*, *б*). При этом сторона, параллельная оси, описывает боковую поверхность цилиндра и является его образующей. Смежные к оси стороны описывают круги — основания цилиндра. Прямая, содержащая сторону прямоугольника, вокруг которой происходит вращение, является осью цилиндра.

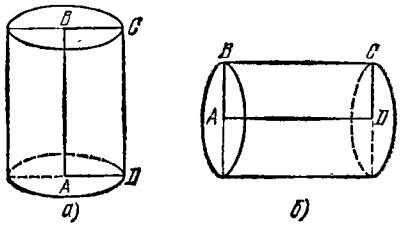


Рис. 287.

Боковая поверхность цилиндра — кривая поверхность. Но ее можно, «разгибая», превратить в плоскую (т. е. положить на плоскость, развернуть). Если развернуть боковую поверхность цилиндра, то получится прямоугольник, длина основания которого равна длине окружности основания цилиндра, а высота — высоте цилиндра (рис. 288). Следовательно, развертка цилиндра состоит из прямоугольника и двух кругов — оснований цилиндра.

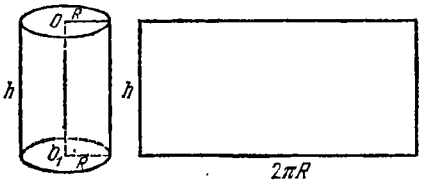


Рис. 288.

Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S_{бок} = 2\pi Rh, \tag{8}$$

где R — радиус основания цилиндра, h — высота цилиндра.

Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра равна площади прямоугольника, основание которого равно $2\pi R$, а высота равна высоте цилиндра h. Поэтому площадь поверхности цилиндра равна

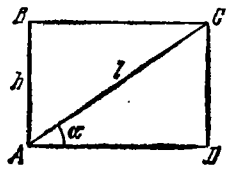


Рис. 289.

$$S = 2\pi R^2 + S_{бок} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh,$$

или

$$S = 2\pi R\,(R + h). \tag{9}$$

Объем цилиндра вычисляется по формуле

$$V = S_{осн}h = \pi R^2 h. \tag{10}$$

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Задача 1. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна l и составляет угол α с основанием. Определить объем цилиндра.

Решение. Пусть R — радиус основания цилиндра, h — высота цилиндра (рис. 289): $h = l\sin\alpha$, $2\pi R = l\cos\alpha$, следовательно, $R = \frac{l\cos\alpha}{2\pi}$. Поэтому $V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{l\cos\alpha}{2\pi}\right)^2 l\sin\alpha$. Отсюда

получим

$$V=\frac{l^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}.$$

Конус. Пусть α — плоскость, SO — отрезок перпендикуляра, опущенного из точки S на плоскость α, P — круг в плоскости α

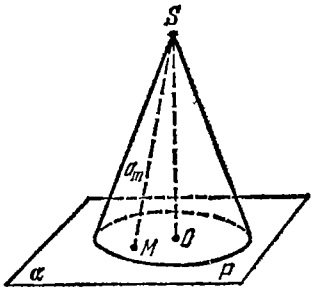


Рис. 290.

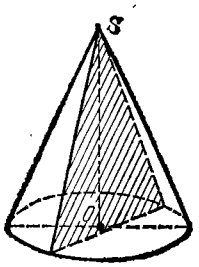


Рис. 291.

с центром O (рис. 290). Соединим произвольную точку M круга P отрезком MS с точкой S. Когда точка M описывает круг P, отрезки MS заполняют некоторое тело. Это тело называется *круговым конусом* или просто *конусом*.

Граница конуса состоит из круга P — *основания* конуса и *боковой поверхности*. Боковую поверхность конуса описывает отрезок a_M, когда точка M пробегает окружность круга P. Точка S называется *вершиной* конуса. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности его основания, называются *образующими* конуса. Прямая OS называется *осью* конуса, а отрезок OS между вершиной и центром основания — *высотой* конуса.

В сечении основания и боковой поверхности конуса плоскостью, проходящей через его вершину и пересекающей основание, получается треугольник. Сторонами этого треугольника являются образующие конуса и хорда (в частности, диаметр) его основания (рис.291). Сечение, проходящее через высоту (ось) конуса, называется осевым сечением.

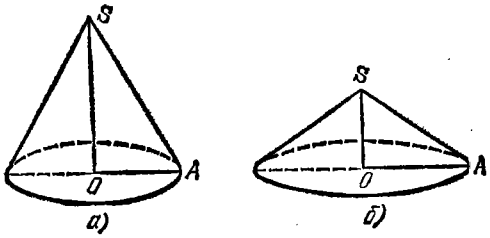


Рис. 292.

Круговой конус можно рассматривать как тело, полученное от вращения прямоугольного треугольника AOS вокруг его катета (рис. 292, *а*, *б*). При этом гипотенуза AS описывает боковую поверхность конуса, а катет — круг (основание конуса). Прямая, содержащая катет, вокруг которого происходит вращение, является осью конуса.

Если развернуть боковую поверхность конуса, то получится круговой сектор, радиус которого равен $|SA|$—длине образующей конуса, а дуга AB имеет длину, равную длине окружности основания конуса (рис. 293). Следовательно, развертка конуса состоит из кругового сектора и круга—основания конуса.

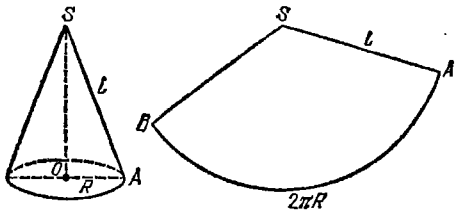


Рис. 293.

Площадь боковой поверхности конуса равна площади сектора SAB: $S_{бок}=\frac{\pi L^2\alpha}{360}$, где L—длина образующей SA, α—величина (в градусах) угла ASB (см. § 3 гл. XVI). Дуга AB имеет длину (см. § 2 гл. XVI) $l=\frac{\pi L\alpha}{180}$. Поэтому

$$S_{бок}=\frac{\pi L^2\alpha}{360}=\frac{\pi L\alpha}{180}\cdot\frac{L}{2}=l\cdot\frac{L}{2}.$$

Но длина l дуги AB равна длине окружности основания конуса, значит, $l=2\pi R$, где R—радиус основания конуса. Отсюда

$$S_{бок}=l\cdot\frac{L}{2}=2\pi R\cdot\frac{L}{2}=\pi RL.$$

Итак, площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S_{бок}=\pi RL, \tag{11}$$

где R—радиус основания конуса, L—длина образующей конуса.

Следовательно, *площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности его основания на образующую.*

Поэтому площадь поверхности конуса равна

$$S=S_{бок}+S_{осн}=\pi RL+\pi R^2,$$

или

$$S=\pi R(R+L). \tag{12}$$

Объем конуса вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}h=\frac{1}{3}\pi R^2h, \tag{13}$$

где h—высота конуса.

Объем конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту.

Шар. Пусть O—произвольная точка и R—любое положительное число. Тело, точками которого являются все точки пространства, удаленные от точки O на расстояние, не большее R,

называется *шаром*. Точка O называется *центром* шара, а число R — *радиусом* шара.

Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой*. Таким образом, *сферой называется множество всех точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром сферы* (или центром шара).

Отрезок, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, называется *радиусом* сферы (или радиусом шара).

Отрезок, соединяющий две точки на сфере, называется *хордой* шара. Хорда шара, проходящая через его центр, называется *диаметром* шара.

В сечении шара любой плоскостью α получается круг; центр O_1 этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара O на секущую плоскость (рис. 294). Если секущая плоскость проходит через центр шара, то в сечении получается круг, радиус которого равен радиусу шара. Такой круг называется *большим кругом*. Окружностями больших кругов на глобусе, например, являются экватор и меридианы.

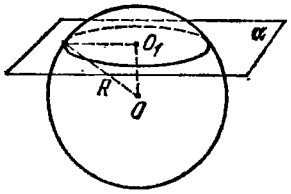


Рис. 294.

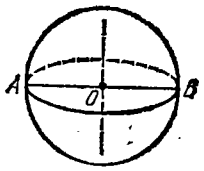


Рис. 295.

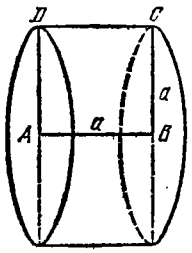


Рис. 296.

Шар можно получить, вращая полукруг вокруг его диаметра. При этом полуокружность описывает шаровую поверхность, или сферу (рис. 295).

Боковые поверхности цилиндра и конуса можно превратить в плоские, т. е. развернуть. Оказывается, что поверхность шара никаким «разгибанием» нельзя сделать плоской. Поэтому формулу для площади поверхности шара нельзя найти, пользуясь разверткой.

Можно доказать, что площадь поверхности шара (или площадь сферы) равна учетверенной площади большого круга:

$$S = 4\pi R^2, \text{ или } S = \pi D^2, \tag{14}$$

где R — радиус шара, D — диаметр шара.

Объем шара вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{15}$$

Задача 2. Доказать, что площадь поверхности тела, образованного вращением квадрата вокруг стороны, равна площади поверхности шара, радиус которого равен стороне квадрата.

Решение. Пусть a — сторона квадрата (рис. 296). При вращении квадрата вокруг стороны AB получим цилиндр, у которого $R_ц = h_ц = a$. Поэтому $S_ц = 2\pi R_ц (R_ц + h_ц)$ (формула (9)) или $S_ц = 2\pi a \cdot 2a = 4\pi a^2$. Площадь поверхности шара $S_ш = 4\pi R_ш^2$ (формула (14)) или $S_ш = 4\pi a^2$. Следовательно, $S_ш = S_ц$.

Упражнения

1. Через данную точку O пространства провести прямую, перпендикулярную к данной плоскости α. Рассмотреть два случая: а) точка O лежит на плоскости α; б) точка O не лежит на плоскости α.

2. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. Найти ребро равновеликого ему куба.

3. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 дм, стороны основания равны 6 дм и 8 дм, а одна из диагоналей основания равна 12 дм. Определить диагонали параллелепипеда.

4. Основанием прямой призмы служит ромб с диагоналями 6 см и 8 см, высота призмы 12 см. Вычислить площадь боковой поверхности и объем призмы.

5. Найти площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q, а площадь диагонального сечения M.

6. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол 30°; площадь боковой поверхности равна S. Найти объем.

7. Вычислить объем правильной: а) треугольной; б) четырехугольной; в) шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна a и высота h ($a = 15$ см, $h = 20$ см).

8. Найти площадь поверхности и объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна h и радиус вписанной в основание окружности равен r.

9. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a и боковые ребра взаимно перпендикулярны.

10. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найти диагональ осевого сечения.

11. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найти площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.

12. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 9 м^2. Найти объем конуса.

13. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем конуса.

14. Равносторонний треугольник со стороной, равной a, вращается вокруг одной из своих сторон. Найти объем тела вращения.

15. Полукруг свернут в коническую поверхность. Определить угол между образующей и осью конуса.

16. Как относятся радиусы двух шаров, если отношение объемов этих шаров равно 1 : 8?

17. Площади двух сфер относятся как $m : n$. Как относятся их объемы?

18. Сосуд имеет форму полушара радиуса R, дополненного цилиндром. Какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы сосуд имел объем V?

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

ЧАСТЬ 1. Гл. II. 15. $-\frac{1}{16}$. **16.** 4. **17.** 12. **18.** 4000. **19.** 1. **20.** $1\frac{1}{8}$. **22.** $\frac{5}{46}<0{,}11$; $11^4>9\cdot10\cdot12\cdot13$. **24.** 5. **25.** 4. **26.** 0; 0. **29.** $2^6\cdot3^5\cdot5$; $2^5\cdot3^3\cdot7$. **31.** а) 13; б) 14. **32.** а) 5670; б) 3900. **33.** Частное увеличится на 2, остаток останется тем же. **34.** 0,(27). **36.** $36\frac{1}{6}$. **37.** $\frac{2}{33}$. **38.** 7200. **39.** $14\frac{2}{7}$. **40.** 181. **41.** $1\frac{1}{96}$. **42.** $x=4$. **43.** $x=11\frac{2}{3}$. **44.** 14, 5 км/ч. **45.** 4 галки, 3 палки. **48.** Да. Например, $\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$.

Гл. III. 1. $0<\frac{1}{x}-2<1$. **2.** $0{,}2<\frac{2}{x}<0{,}4$. **3.** $7<x+y<9$, $2<x-y<4$, $10<xy<18$, $\frac{5}{3}<\frac{x}{y}<3$. **4.** 0,04 (с недостатком), 0,06 (с избытком). **5.** $\frac{1}{175}$ (с недостатком), $\frac{3}{700}$ (с избытком). **6.** $x=2{,}4\pm0{,}01$. **7.** $\frac{1}{300}$; $\frac{1}{300}$; $\frac{1}{3000}$. **8.** $22{,}2\leqslant y\leqslant23{,}2$. **9.** $x=8{,}443\pm0{,}001$. **10.** Второе измерение точнее. **11.** $\approx2{,}2\%$. **12.** 0,1608; $x=40{,}2\pm0{,}2$. **13.** $\approx0{,}12\%$. **14.** $3\frac{1}{7}$ точнее. **15.** Верные цифры 8 и 3. **16.** $x\approx15{,}3$. **17.** 2,71828; 2,7183; 3. **19.** 28,5; 28,4; 28,6. **20.** $\frac{3}{7}\approx0{,}429$. **23.** $3{,}9\cdot10^{-2}\pm0{,}1\cdot10^{-2}$. **25.** 18,8. **26.** 25. **27.** 0,7. **28.** 31,6. **29.** 129,20. **30.** 3,639. **31.** 39. **32.** 1,89. **33.** 44 м². **34.** 57 кг. **35.** 358 км. **36.** 2,87 кг. **37.** 10 а. **38.** 30 м. **39.** 1,1 м/с². **40.** 1,4.

Гл. IV. 1. Извлечь из обеих частей неравенства корень 100-й степени и доказать, что $200^3>300^2$. **2.** $333^{555}+555^{333}=3^{555}\cdot111^{555}+5^{333}\cdot111^{333}$; 111 кратно 37. **13.** $-\sqrt{x(x-1)}$. **14.** 1. **15.** 2. **17.** $\frac{9}{5}$; 1,7; 1,73. **20.** Да. Например, $(3-\sqrt{5})+(7+\sqrt{5})=10$. **21.** Да. Например, $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=5$. **26.** а) $3\sqrt{5}$; б) $\sqrt{41}$. **27.** 0,12. **28.** $-13{,}75$. **31.** $\frac{1}{8}$. **32.** $\frac{1}{16\cdot5^k}$. **33.** а) 3; б) -18. **40.** $-2\sqrt{3}$. **46.** $\frac{1}{8}$. **47.** $x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}z^{-\frac{1}{3}}$. **48.** $x^{\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{2}}$. **49.** 0. **52.** $\frac{y^6}{x^4}$. **53.** $\frac{b^4}{a^3}\sqrt{\frac{3\sqrt{2b}\sqrt[4]{b}}{\sqrt[24]{a^7}}}$. **54.** $\frac{a}{b}$. **56.** $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{9}}$.

Гл. V. 1. 38,8%. **2.** 1,1 м и 0,88 м. **3.** 64%. **4.** 70 км. **5.** 440 деталей. **6.** $(x-1)(3x^2+4x+3)$. **8.** $(a^2+ab+2b^2)\cdot(a^2-ab+2b^2)$. Данное выражение записать сначала в виде $(a^2+2b^2)^2-a^2b^2$. **9.** $(x^2+xy\sqrt{2}+y^2)(x^2-xy\sqrt{2}+y^2)$. **10.** $(2a-b)(a+b-1)$. Сначала разложить $2a^2+ab-b^2=(2a-b)(a+b)$. **13.** б) $\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{30}$. **14.** $\frac{1}{5(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}$. **15.** а) $x^2+2xy+3y^2$;

б) $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$, если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $a+b\neq 0$. В этом случае $\sqrt{ab}=$ $=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$; ввести $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$. $\frac{2\sqrt{-a}+3\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}-2\sqrt{-b}}$, если $a<0$, $b<0$, $a\neq 9b$. В этом случае $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$; ввести $\sqrt{-a}=x$, $\sqrt{-b}=y$. **16.** $\frac{x-y}{x}$, где $xy\neq 0$. **17.** $\frac{1}{a}$, где $a\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq -3$, $x\neq 2a$. **18.** $\frac{xy}{x+y}$, где $x\neq y$, $x\neq -y$. **19.** $\frac{72}{a^2-3a+9}$. **20.** $\frac{a-b}{3a+b}$. **21.** $\frac{x-1}{x^2-x-1}$. Разложить $x^3+x-2=(x^3-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+x+2)$. **22.** $a\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)$. **23.** 27. **24.** -1, если $0<a\leqslant 1$; $-\left(\frac{\sqrt{1-a^2}+1}{a}\right)^2$, если $-1<a<0$. **25.** 3. **26.** $\sqrt[6]{a}$. **27.** $9a$. **28.** $\frac{x^2}{2x-1}$. **29.** $\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **30.** $\sqrt{\frac{x}{y}}$, где $xy\neq 0$. Положить $\sqrt{\frac{x}{y}}=a$ $(a>0)$ и вынести $\frac{1}{4}$ из-под знака корня. **31.** 0, если $a\geqslant 0$, $b>0$, $a\neq b$. **32.** $|a+2|+|a-2|$. **33.** $\frac{1}{m}$. **34.** $\frac{2}{2-a}$. Записать $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}=|\sqrt{a-1}+1|$, $\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}=|\sqrt{a-1}-1|$; при $1<a<2$ разность $\sqrt{a-1}-1$ отрицательна. **35.** $n(n-1)$, если $|n|>1$. **41.** $-4\frac{1}{60}$. **42.** 101. **43.** $(a+c)^2-b^2$; 1. **44.** 1. **45.** 2,52. **46.** 51р. 92 к., 1 ч. **47.** 1800. **48.** 50 р. **49.** $2\frac{2}{7}$%. **51.** На 25%. **52.** 530 р. 45 к. **53.** На 32%. **54.** На 20%. **55.** 0,025%. **56.** 35 м. **57.** 480 растений. **71.** -6. **72.** При $x=8$ принимает наибольшее значение, равное 54. **76.** $\frac{n^3}{2(n-1)}$. **78.** 1. **79.** $\left|x^{\frac{1}{3}}y^{-1}-3y^{\frac{2}{3}}\right|$. **80.** $\frac{b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}}$. **84.** 1. **85.** 2. **86.** 4.

Гл. VI. 1. $x=1$. **2.** x — любое, $x\neq\frac{2}{3}$. **3.** Решений нет. **4.** Если $a\neq 1$, то $x=\frac{3}{a-1}$; если $a=1$, то решений нет. **6.** Если $b\neq\pm a$, то $x=\frac{1}{a+b}$; если $b=a$, то x — любое, $x\neq\frac{1}{a}$; если $b=-a$, то решений нет. **7.** $x=4$.

8. Если $ab \neq 0$ и $b \neq a$, то $x_1 = a + b$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$. **9.** Если $a = 0$, то x — любое, $x \neq 0$; если $a \neq 0$, то решений нет. **10.** $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Положить $x^2 - 5x + 7 = y$. **11.** $x = 1$. Разложить: $x^3 + x^2 - 2 = (x^3 - 1) + (x^2 - 1)$. **12.** $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$; $x_{3,4} = \pm 1$. Положить $x^2 = y$. **13.** $x = 7$. **14.** $x = -1$. **15.** $x = \pm 5$. Положить $\sqrt{x^2 + 11} = y$. **16.** Если $a > 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}a$; если $a = 0$, x — любое, $x \leqslant 0$; если $a < 0$, то решений нет. **17.** $a = \pm \frac{1}{2}$. **18.** 117. **19.** $a = 4$. **20.** $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$. **21.** $x_1 = 6$, $y_1 = 4$; $x_2 = -2$, $y_2 = -4$. **22.** Если $a \neq \frac{1}{3}$, $a \neq -1$, то $x = \frac{2(a-1)}{3a-1}$, $y = \frac{a+1}{1-3a}$; если $a = -1$, то $y = 1 - x$, где x — любое; если $a = \frac{1}{3}$, то решений нет. **23.** $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 3$. **24.** $x_1 = 4$, $y_1 = 3$; $x_2 = -4$, $y_2 = -3$. Положить $\frac{x}{y} = t$. **25.** (5; 1), (1; 5), (2; 3), (3; 2). Записать систему в виде $\begin{cases} (x+y) + xy = 11, \\ xy(x+y) = 30 \end{cases}$ и положить $x + y = u$, $xy = v$. **26.** (7; 3), (−7; −3). Использовать уравнение $\frac{y(y-x)}{x(x-y)} = -\frac{12}{28}$. **27.** (2; 6), (1; 3). Положить $\frac{2}{x} = u$, $\frac{y}{3} = v$. **28.** 50 км/ч. **29.** 15 дней, 10 дней. **30.** $100(\sqrt{2} - 1)\%$. **31.** 36. **32.** 24 и 20 попаданий. **33.** 10 м. **34.** 48 ч. **35.** 34 и 9. **36.** 75%. **37.** 1 : 1. **38.** 2%. **39.** 10 км. **40.** 99 л. Если x л — искомое количество, a р. — цена литра бензина в первой бочке, b р. — во второй. Уравнение $\frac{(220-x)a + bx}{220} = \frac{(180-x)b + ax}{180}$ приводится к виду $20(b-a)x = 1980(b-a)$, где $a \neq b$. **41.** 180 р. Пусть x р. — цена магнитофона, y — число студентов. По условию $170 \leqslant x \leqslant 195$. Уравнение $\frac{x}{y-2} = \frac{x}{y} + 1$ приводится к уравнению $y^2 - 2y - 2x = 0$, откуда $y = 1 + \sqrt{1+2x}$. Так, $341 \leqslant 1 + 2x \leqslant 391$ и y — целое, то $1 + 2x = 361$ (единственное целое число из отрезка [341; 391], из которого извлекается корень). **42.** Данное неравенство равносильно неравенству $(a-bc)^2 + (b-ac)^2 + (c-ab)^2 \geqslant 0$. **43.** Данное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geqslant 6$. **44.** $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2}$; использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел. **45.** Записать неравенство в виде $\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$. **46.** Сложить очевидные неравенства $a^3 < a^2c$ и $b^3 < b^2c$, учесть, что $a^2 + b^2 = c^2$. **47.** x — любое, $x \neq 2$. **48.** $-4{,}5 < x < -2$, $x > 3$. **49.** $\frac{2}{9} < x \leqslant 10$. **50.** Не имеет решений. **51.** Если $a < \frac{2}{3}$, то $x > \frac{5}{2-3a}$; если $a > \frac{2}{3}$, то $x < \frac{5}{2-3a}$; если $a = \frac{2}{3}$, то решений нет. **52.** $-1 < x < 2$, $2 < x < 3$. **53.** $x < \frac{1}{3}$, $3 < x < 5$, $x > 5$. **54.** $x < -1$, $x \geqslant 4$.

55. $x<0$, $2\leqslant x\leqslant 3$. **56.** $0\leqslant x\leqslant 8$. **57.** $x<-2$, $-1<x\leqslant 0$. **58.** $x_1=4$, $x_2=-2$. **59.** $x=-\frac{1}{2}$. **60.** x — любое, $x\leqslant 1$. **61.** $x_1=2$, $x_2=-\sqrt{5}-1$. **63.** $x<2$. **64.** $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. **65.** $x<-\frac{1}{2}$, $x\geqslant 5$. **66.** $\frac{5}{9}<a<1$, $a\geqslant 6$. **67.** $a<-\frac{7}{4}$. По условию задачи $a<0$ и $D=49-16a^2<0$. **68.** $-7<a<1$. **69.** Используя условие задачи, показать, что сумма дискриминантов $D_1+D_2=(p_1-p_2)^2\geqslant 0$. **70.** $-\frac{16}{7}\leqslant a<-1$. По условию задачи имеем систему неравенств $\begin{cases} D=9a^2-16a(a+1)\geqslant 0, \\ x_1>1, \\ x_2>1 \end{cases}$ и заменяем равносильной системой $\begin{cases} D\geqslant 0, \\ (x_1-1)+(x_2-1)>0, \\ (x_1-1)(x_2-1)>0. \end{cases}$ Применяем затем теорему Виета. **71.** а) Да; б) нет. **72.** 1; $-1\frac{1}{4}$. **73.** 4. **74.** 2; $-\frac{7}{9}$. **75.** $\frac{a}{a+b}$; $\frac{b}{a-b}$. **76.** $a\pm 2b$. **77.** а) $qx^2+px+1=0$; б) $acx^2+bx+a=0$. **78.** p^2-2q. **79.** $p(3q-p^2)$. **80.** 3 и 15 или -15 и -3. **81.** -16. **82.** 24. **83.** 5. **84.** 50 км/ч. **85.** -1; -4. **86.** 1; $\frac{-27}{8}$. **87.** $-1\pm 2\sqrt{2}$; -4; 2. **88.** 6. **89.** 4. **90.** $\frac{3a^2}{4}$. **91.** 0; $\pm a$. **92.** (3; 12); $(-3;\ -12)$. **93.** $\left(-12;\ \frac{7}{2}\right)$; $\left(12;\ -\frac{7}{2}\right)$; $\left(5\sqrt{2};\ -\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-5\sqrt{2};\ \frac{7\sqrt{2}}{4}\right)$. **94.** (4; 64). **95.** 20 ч и 30 ч. **96.** а) $x<-7$, $x>2$; б) $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3$. **97.** а) $x<-1$, $x>\frac{2}{3}$; б) $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$. **98.** а) $x\leqslant -6$; б) $1\leqslant x<3$. **99.** а) $x<-2$ и $x>\frac{4}{3}$; б) $x\geqslant\frac{9}{2}$. **101.** а) $x<-5$, $x\geqslant 2$; $-3\leqslant x<0{,}5$; б) $x<-8$; $3{,}5<x<5$.

Гл. VII. 1. $0\leqslant x\leqslant 4$. **2.** $x<0$. **3.** $x>1$. **4.** $x>0$, $x\neq 1$. **5.** $2\leqslant x\leqslant 3$. **6.** Функция не определена. **7.** Нечетная. **9.** Четная. **11.** Четная. **12.** Нечетная. **13.** $y=\frac{x-3}{2}$. **14.** $y=\frac{1}{x}$. **15.** $y=x^3$, если $x\geqslant 0$. **16.** $y=\log_2 x$. **17.** $y=\sqrt[4]{x}$, если $x\geqslant 0$; $y=-\sqrt[4]{x}$, если $x\leqslant 0$. **18.** 2. **19.** 2. Использовать неравенство $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. **20.** Пусть x (м) — сторона прямоугольника. Тогда другая сторона равна $2-x$. Площадь прямоугольника $S=x(2-x)$. Задача состоит в отыскании наибольшего значения трехчлена $2x-x^2$. **27.** «Нижняя» полуокружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2. **34.** Начало координат. **35.** Парабола $y=x^2$. **39.** (6; -8); $(-8;\ 6)$. **40.** (3; 4), (4; 3), $(-3;\ -4)$, $(-4;\ -3)$. **47.** $-2\leqslant x\leqslant 12$, или $[-2;\ 12]$. **48.** x — любое число, кроме $x=3$ и $x=-1$, или $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 3[\cup]3;\ \infty[$. **49.** $x>-\frac{1}{5}$ или $\left]-\frac{1}{5};\ +\infty\right[$. **50.** $x<1$, $x\neq 0$ или $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ 1[$. **51.** $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5$. **52.** Нечетная. **53.** Нечетная.

54. Четная. **55.** Ни четная, ни нечетная. **56.** Убывает при $x<0$, возрастает при $x>0$; положительна при $x<-2$ и $x>2$, отрицательна при $-2<x<2$. **57.** Убывает на всей области определения (на множестве действительных чисел); положительна при $x>-2$, отрицательна при $x<-2$. **58.** $y=5-\frac{1}{x}$. **59.** $y=3^x$. **60.** $y=\sqrt[20]{x}$. **61.** 1. **62.** 64.

Гл. VIII. 1. Найти $a_{n+1}=10-3(n+1)=7-3n$ и рассмотреть разность $a_{n+1}-a_n=7-3n-(10-3n)=-3$; $d=-3$. **2.** $n=19$. **3.** $x=36$. **4.** Надо доказать, что $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, если $b-a=c-a$. **5.** Составить систему $\begin{cases} a_1q^2=a_1+9, \\ a_1q=a_1q^3+18 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1(q^2-1)=9, \\ a_1q(q^2-1)=-18. \end{cases}$ При решении системы разделить одно уравнение на другое: $q=-2$, $a_1=3$; 3; -6; 12; -24. **6.** $n=6$. **7.** 3, 7, 11 или 12, 7, 2. **8.** 8; 16; 32. **9.** $x=20$, $y=6$. **10.** $\lg y=\lg 2+5\lg a+2\lg(-b)+4\lg c$, где $a>0$, $b<0$, $c>0$. **11.** $x=3$. **12.** $x=2$. **13.** $x=1$. **14.** $x=36$. **15.** $x=1{,}5$. **16.** x — любое положительное число. **17.** $x=10$. **18.** $x=1$. **19.** $x_1=100$, $x_2=\frac{1}{10}$. **20.** $0<a<1$. **21.** $x<-2$, $x>2$. **22.** $x>5$. **23.** $-3\leqslant x\leqslant 2$. **24.** $x>2$. **25.** $0<x\leqslant 3$, если $a>1$; $x\geqslant 3$, если $0<a<1$. **26.** а) Возрастающей; б) убывающей. **28.** 1065. **29.** 6; 9; 12; 15; 18; 21. **30.** $(a-b(n+1))n$. **31.** $a_1=33$, $d=-4$. **32.** -10. **34.** 6. **35.** 8 или 9. **36.** $q=\pm 3$. **37.** 27; -9; 3; -1 или 54; 18; 6; 2. **38.** 5; 13; 21; 29. **39.** а) 0,02; б) $\frac{9}{5}$. **40.** 0. **42.** $x\approx -0{,}4368$. **43.** -2. **44.** 4. **45.** 0; 2. **46.** 10. **47.** ± 1; ± 3. **48.** 10; 10^{-45}. **49.** 1; 2. **50.** $\pm\sqrt{2}$. **51.** 0; 4. **52.** $x=\frac{1}{9}$, $y=-1$ или $x=3$, $y=2$. **53.** $x=4$, $y=-3$ или $x=3$, $y=4$. **54.** $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$. **55.** $-1<x<\frac{3}{5}$. **56.** $2<x<3$. **57.** $x>0$. **58.** $x<-4$ и $x>2$. **59.** $x<-4$ и $x>8$. **60.** $x<-1$, $x\neq -2$.

ЧАСТЬ 2. Гл. IX. 1. $AD=8$, 1 см. **3.** 14 см; 2 см. **4.** $1\frac{3}{7}d$.

Гл. X. 24. 4 м. **32.** 12 см. **34.** $1\frac{3}{17}d$. **36.** 2 см.

Гл. XI. 10. 30. мм. **11.** 60°. **12.** 20 см; 60 см. **13.** 30 см. **14.** 40°, 60°, 80°. **15.** 1,5 см. **16.** 6 см. **17.** 9 см, 12 см, 15 см, 12 см. **18.** 120°, 110°, 60° 70°.

Гл. XII. 4. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **5.** 21 см. **6.** 36 см и 54 см. **7.** $R=25$ см, $r=8$ см, $d=15$ см; R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, d — расстояние между центрами окружностей. **8.** $CD=10\frac{2}{3}$. **10.** 16 см и 9 см. **11.** Указание. Использовать метод подобия. **12.** 30 см. **13.** 1,2 м. **14.** 50 см; 15 см; 31,25 см. **15.** 25 см; 6,72 см. **16.** 10,2 см; 13,6 м; 17 м. **17.** 11,2 см.

Гл. XIII. 2. Бесконечное множество. На прямой, параллельной данным и равноотстоящей от них. **4.** Указание. Использовать преобразование симметрии относительно данной точки. **7.** Указание. Доказать, что точка пересечения осей симметрии является центром симметрии. **8.** Если

$a \nparallel a_1$, то использовать осевую симметрию, а если $a \parallel a_1$ — центральную симметрию или параллельный перенос. **9.** Указание. Рассмотреть окружность, симметричную одной из данных относительно точки O. **10.** Указание. Использовать точки P_1 и P_2, симметричные точке P относительно прямых BA и BC. **13.** Указание. Использовать гомотетию относительно вершины угла.

Гл. XIV. 1. а) Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм; б) четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм или трапеция. **2.** Указание. Пусть E и F — середины сторон AB и BC треугольника ABC; $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. **3.** $m=2$. **4.** $n=12$, $n=-12$. Указание. $|a| = \sqrt{25+n^2}$. **5.** Указание. Если $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1; y_2-y_1)$. **6.** а) $\cos\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$; б) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$; в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. **7.** $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135° = -1$; $\sin 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Указание. Использовать формулы $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$. **8.** Не может. **9.** $\frac{\sqrt{c^2+d^2 \pm 2cd\cos\alpha}}{2}$. **10.** 13 м. **12.** Указание. Применить теорему косинусов. **13.** 3 см и 8 см. **14.** $|AB| = \sqrt{6}+3\sqrt{2}$ см, $|AC| = 2\sqrt{6}$ см. **15.** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}$. **16.** а) $\overrightarrow{AB} = (2; -1)$; б) $\overrightarrow{AB} = (-1; -2)$; в) $\overrightarrow{AB} = (5; -4)$; г) $\overrightarrow{AB} = (-4; -4)$. **17.** а) $B(-2; 1)$; б) $B(0; 2)$; в) $B(0; 2)$. **18.** а) $D(1; -3)$; б) $D(-4; -3)$. **19.** а) $\hat{A} = 34°23'$; $\hat{B} = 55°37'$; $c = 240$; б) $c = 5{,}79$, $\hat{A} = 32°30'$, $\hat{B} = 57°30'$; в) $a = 3{,}56$, $b = 1{,}34$, $\hat{B} = 18°42'$; г) $a = 0{,}104$, $b = 0{,}058$, $\hat{A} = 60°46'$; д) $c = 42{,}6$; $b = 40{,}1$, $\hat{B} = 70°24'$; е) $c = 40{,}9$, $a = 11{,}1$, $\hat{A} = 15°48'$; ж) $b = 3{,}1$, $\hat{A} = 34°14'$, $\hat{B} = 55°46'$; з) $a = 95{,}7$, $\hat{A} = 54°13'$; $\hat{B} = 35°47'$. **20.** 5,16 см и 4,22 см. **21.** $c = 37$, $\alpha = 101°$, $\beta = 31°40'$. **22.** $\alpha = 41°24'$, $\beta = 55°46'$, $\gamma = 82°50'$. **23.** а) $\gamma = 77°32'$, $b = 57{,}6$, $c = 115$; б) $37°14'$, $a = 80{,}8$, $c = 59$. **24.** а) $\beta = 17°43'$, $\gamma = 130°41'$, $c = 44{,}9$; б) $\beta = 129°12'$, $\gamma = 42°27'$, $c = 27$.

Гл. XV. 1. 8 м и 18 м. **2.** 30°. **3.** Квадрат. **4.** 202,8 дм². **5.** $\frac{a^2}{4}$. **6.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **7.** $3r^2\sqrt{3}$. **8.** Указание. Если M — точка внутри равностороннего треугольника, то из равенства $S_{\triangle AMB} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMC} = S_{\triangle ABC}$ следует, что сумма $AM+BM+CM$ равна высоте треугольника ABC. **9.** 11,2 см. Указание. Применить формулу Герона. **10.** $R = 12{,}5$ см, $r = 3$ см; R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности. Указание. Данный треугольник прямоугольный; найти r по формуле $r = \frac{S}{p}$. **11.** $\frac{3a^2}{2(3+\sqrt{3})}$. **12.** 480 см². **13.** 540 м². **14.** $6\sqrt{3}$ см². **15.** $\sqrt{S}$. **16.** $S = \frac{1}{2}ab$. **17.** $\frac{1}{2}l^2 \cdot \sin 2\alpha$. **18.** 48 см², **19.** 16 см и 12 см. **20.** 5 м. **21.** $6\sqrt{2}$ см.

22. $\sqrt{2}$. 23. 120 дм². 24. 39 дм². 25. 5 дм. 26. 8 см и 10 см. 27. 150 см². 28. $\frac{1}{4}kl$.

Гл. XVI. 1. а) При $n<6$; б) при $n=6$; в) при $n>6$. 2. а) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$. 4. а) $\frac{\pi a}{3}$; б) $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; в) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. 5. $(\pi-2)R^2$. 6. $\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}l$. 7. $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 8. 144°. 9. 4 дм и 2,5 дм. 10. 0,7 R. 11. а) 8; б) 11; в) 13. 12. 30°, 90°, 120°, 120°, 180°.

Гл. XVII. 1. б) Указание. $h_a=\frac{2S}{a}$, где a—сторона треугольника, h_a—высота треугольника, проведенная к этой стороне, S—его площадь. 2. 42 см и 56 см. 3. 8 см и 15 см. 4. $r=\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$. 5. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\sin\beta=\frac{4}{5}$; α и β—острые углы треугольника. 7. $\frac{2}{5}$. 8. $\frac{3}{4}$. 9. 7,2. 10. $\sqrt{\frac{8}{3}}$. 11. CD. 12. $S=\frac{9}{2}r^2$. 13. 25 π см². 14. $S=\frac{(a^2-b^2)(\sqrt{3}-1)}{4}$. 15. Основание равно $2m\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $R=\frac{m}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 17. $2\sqrt{2}$ м. 18. 54 см².

19. $\frac{2}{\pi}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Гл. XVIII. 2. 30 м. 3. 13 дм и 9 дм. 4. $S_{бок}=240$ см², $V=288$ см³. 5. $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. 6. $\frac{abS}{4(a+b)}$. 7. а) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$; б) $\frac{a^2h}{2}$; в) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{2}$. 8. $S=4r\left(r+\sqrt{h^2+r^2}\right)$, $V=\frac{4}{3}r^2h$. 9. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. 10. 5 м. 11. 36 см². 12. 9π м³. 13. $\frac{1}{3}\pi l^3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$. 14. $\frac{\pi a^3}{4\sqrt{3}}$. 15. 30°. 16. 1 : 2. 17. $\sqrt{\frac{m^3}{n^3}}$. 18. $\frac{V}{\pi R^2}-2R$.